

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Franciele Manoel da Silva

**ESTUDO DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN
CONSIDERANDO A MÉTRICA DE WEYL E DISCOS**

Florianópolis

2015

Franciele Manoel da Silva

**ESTUDO DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN
CONSIDERANDO A MÉTRICA DE WEYL E DISCOS**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós-Graduação em Física para a
obtenção do Grau de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. Celso de Ca-
margo Barros Junior

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Silva, Franciele Manoel da

Estudo da solução das equações de Einstein considerando a métrica de Weyl e discos / Franciele Manoel da Silva ; orientador, Celso de Camargo Barros Junior - Florianópolis, SC, 2015.

104 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Física.

Inclui referências

1. Física. 2. Relatividade geral. 3. Equações de campo de Einstein. 4. métrica de Weyl. 5. Fluido perfeito. I. Junior, Celso de Camargo Barros. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Franciele Manoel da Silva

ESTUDO DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN CONSIDERANDO A MÉTRICA DE WEYL E DISCOS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 02 de setembro 2015.

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior
Presidente

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior
Orientador

Prof. Dr. Marcelo Gomes de Paoli

Prof. Dr. Lucas Nicolao

Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, ao meu irmão e à toda a minha família, pelo apoio.

Aos meus colegas Luis, Giovanni e Bruno, pelas discussões sobre relatividade e pela amizade.

Ao Prof. Celso, pela orientação.

Aos funcionários do departamento, por proporcionarem as condições para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho o principal objetivo é a resolução da equação de Einstein da relatividade geral para um espaço-tempo estático com simetria axial, representado pela métrica de Weyl, e considerando que a fonte do campo gravitacional pode ser expressa pelo tensor de energia-momento de um fluido perfeito. Como resultado, obtivemos três soluções particulares, baseadas em equações de estado específicas, a primeira considerando a pressão e a densidade de massa do fluido perfeito constantes, a segunda assumindo a pressão e a densidade proporcionais a um dos termos da métrica e a última para a pressão igual a uma densidade de massa arbitrária, com dependência radial. As equações para o caso geral, $p(r, z) = \lambda c^2 \rho(r, z)$, também são propostas.

Palavras-chave: relatividade geral, equações de campo de Einstein, métrica de Weyl, fluido perfeito

ABSTRACT

In this work the main objective is to solve the Einstein equation of general relativity in a static axially symmetric spacetime, represented by Weyl metric, and considering that the source of the gravitational field can be expressed by the perfect fluid energy-momentum tensor. As a result, we obtained three particular solutions, based on specific equations of state, the first one considering the perfect fluid pressure and mass density constants, the second taking the pressure and density proportional to one of the metric terms and the last one considering the pressure equal to an arbitrary mass density, with radial dependence. The equations for the general case, $p(r, z) = \lambda c^2 \rho(r, z)$, are also proposed.

Keywords: general relativity, Einstein field equations, Weyl metric, perfect fluid

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Na figura acima vemos uma superfície curva bidimensional. Fonte [15].	39
Figura 2 Coordenadas esferoidais prolatas ilustradas em termos das coordenadas canônicas de Weyl. Fonte [4].	61
Figura 3 Gráfico para a componente $g_{rr}^{(1)} = g_{zz}^{(1)} = e^{2\nu_1(r,z)}$ da métrica, com $\nu_1(r)$ dado pela equação (5.16).	68
Figura 4 Gráfico para a componente $-g_{tt}^{(1)}/c^2 = e^{2\psi_1(r,z)}$ da métrica, onde $\psi_1(r)$ é a solução da equação (5.18). A região do vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.	69
Figura 5 Gráfico para a componente $g_{rr}^{(2)} = g_{zz}^{(2)} = e^{2\nu_2(r,z)}$ da métrica, com $\nu_2(r)$ dado pela equação (5.17).	70
Figura 6 Gráfico para a componente $-g_{tt}^{(2)}/c^2 = e^{2\psi_2(r,z)}$ da métrica, onde $\psi_2(r)$ é a solução da equação (5.19). A região do vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.	71
Figura 7 Gráfico para a pressão $p(r) = c^2\rho(r)$, onde $\rho(r)$ é dada pela equação (5.28).	75
Figura 8 Gráfico para a densidade de massa $\rho(r)$ dada pela equação (5.28).	75
Figura 9 Gráfico para a componente $-g_{tt}/c^2 = e^{2\gamma(r)}$ para a parte interna e $-g_{tt}/c^2 = e^{2\gamma e(r)}$ para a parte externa da métrica, onde $\gamma(r)$ é dado pela equação (5.26) e $\gamma e(r)$ é dado pela equação (5.30). A região de vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.	76
Figura 10 Gráfico para a componente $g_{rr} = g_{zz} = e^{2\alpha(r)}$ para a parte interna e $g_{rr} = g_{zz} = e^{2\alpha e(r)}$ para a parte externa da métrica, onde $\alpha(r)$ é dado pela equação (5.26) e $\alpha e(r)$ é dado pela equação (5.29). A região de vácuo começa em $r = 5 * 10^{20} m$.	76
Figura 11 Gráfico para a componente $g_{\varphi\varphi}/r^2 = e^{2\beta(r)}$ para a parte interna e $g_{\varphi\varphi}/r^2 = e^{-2\gamma e(r)}$ para a parte externa da métrica, onde $\beta(r)$ é dado pela equação (5.27) e $\gamma e(r)$ é dado pela equação (5.30). A região de vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.	77
Figura 12 Gráfico para $\rho(r)$ e $\rho^{\text{exp}}(r)$, onde $\rho(r)$ é calculado pela equação (5.28) e $\rho^{\text{exp}}(r)$ é um resultado da literatura [50–52], dado pela equação (5.31).	78
Figura 13 Gráfico para $\rho(r)$ e $\rho^{MW}(r)$, onde $\rho(r)$ é calculado pela equação (5.28) e $\rho^{MW}(r)$ é um resultado da literatura [52,53], dado	

pela soma das funções (5.32) a (5.35)	80
Figura 14 Mesmo gráfico da Figura 12 mas, para uma escala diferente, para melhor comparação das curvas.	80
Figura 15 Gráfico para $-g_{tt}/c^2 = e^{2g(r)}$, onde $g(r)$ é dado pela equação (5.38). A região do vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.	83
Figura 16 Gráfico para $g_{rr} = g_{zz} = e^{2a(r)}$, onde $a(r)$ é dado pela equação (5.39). A região do vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.	84
Figura 17 Gráfico para $g_{\varphi\varphi}/r^2 = e^{2b(r)}$, onde $b(r)$ é dado pela equação (5.37). A região de vácuo começa em $r = 5 * 10^{20}m$	84
Figura 18 Gráfico para a densidade de massa $\rho(r)$, dada pela equação (5.36).	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros para $\rho_b(r, z)$	79
Tabela 2	Parâmetros para $\rho_d(r, z)$	79
Tabela 3	Parâmetros para $\rho_g(r, z)$	79
Tabela 4	Parâmetros para $\rho_h(r, z)$	79

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
2 REVISÃO MATEMÁTICA	27
2.1 ESPAÇOS CURVOS	27
2.2 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	28
2.3 DERIVADA COVARIANTE	31
2.4 RELAÇÃO ENTRE OS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL E O TENSOR MÉTRICO	35
2.5 EQUAÇÃO DA GEODÉSICA	37
2.6 TENSOR DE RIEMANN	38
2.7 TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO	41
2.7.1 Tensor de Energia-Momento para fluidos perfeitos	42
3 REVISÃO RELATIVIDADE GERAL	47
3.1 PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA E PRINCÍPIO DA CO-VARIÂNCIA GERAL	47
3.2 LIMITE NEWTONIANO	49
3.3 EQUAÇÕES DE CAMPO	50
4 ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO COM SIMETRIA AXIAL	55
4.1 MÉTRICA DE WEYL	55
4.2 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO PARA MÉTRICA DE WEYL NO VÁCUO	59
5 SOLUÇÕES PARA DISCOS	63
5.1 PRESSÃO E DENSIDADE DE MASSA CONSTANTES	65
5.1.1 Solução para $\nu_1(r, z)$	67
5.1.2 Solução para $\nu_2(r, z)$	70
5.2 PRESSÃO E DENSIDADE DE MASSA PROPORCIONAIS AO TERMO (11) DA MÉTRICA	72
5.2.1 Comparação com resultados da literatura	77
5.3 PRESSÃO E DENSIDADE DE MASSA COM DEPENDÊNCIA RADIAL	81
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	87
7 DIREITOS AUTORAIS	89
REFERÊNCIAS	91
APÊNDICE A – Código para calcular equações de campo	99

1 INTRODUÇÃO

Em 1915, Albert Einstein publicou sua teoria da relatividade geral [1,2], que é a teoria que estende o princípio da relatividade para referenciais não inerciais. Para a construção de sua teoria Einstein utilizou a equivalência entre referenciais não inerciais e campos gravitacionais e concluiu que a gravidade pode ser explicada por uma curvatura no espaço-tempo. Apesar de obter sucesso em alguns testes experimentais para sistemas astronômicos, existem problemas importantes em aberto que a relatividade geral ainda não explica como a matéria e a energia escura e as ondas gravitacionais.

A resolução das equações de campo de Einstein, que são as equações diferenciais que determinam o campo gravitacional de um dado sistema, não é uma tarefa simples, devido ao seu acoplamento e não linearidade. Ainda assim, existem atualmente muitas soluções conhecidas das equações de campo da relatividade geral. No livro [3] esta catalogada uma grande quantidade dessas soluções, que já foram encontradas e classificadas. No entanto, somente algumas poucas dessas soluções conhecidas são estudadas de forma mais aprofundada de modo a procurar entender seu significado físico e geométrico, como em [4] onde procurou-se coletar informações relacionadas às propriedades de algumas das soluções conhecidas a mais tempo. A primeira solução a ser encontrada foi a de Schwarzschild, em 1916, [5, 6] que representa um corpo massivo com simetria esférica. Esse é o resultado exato mais importante da relatividade geral pois, foi a partir dele que surgiu o conceito de buraco negro. Além disso, a solução de Schwarzschild é usada como base para os três testes clássicos da relatividade geral, que são:

- precessão do periélio de Mercúrio;
- deflexão da luz vinda de uma estrela, quando a luz passa perto do Sol;
- desvio de linhas espectrais pela presença do campo gravitacional (red-shift).

Outras soluções importantes que podem ser encontradas na literatura são:

- solução de Kerr, que representa um buraco negro em rotação;

- solução de Friedmann, que descreve a evolução do universo em função do tempo para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico;
- solução de Einstein-Rosen, que representa ondas gravitacionais com simetria cilíndrica.

Um tipo de solução especialmente importante são as soluções para discos de matéria, pois, este tipo pode ser utilizado para a representação de galáxias, em especial as espirais, e também para representar discos de acreção. Alguns trabalhos [7–11] procuraram por este tipo de solução com o intuito de mostrar ou verificar se os efeitos não lineares da gravitação geral poderiam explicar a matéria escura, no entanto, foram encontrados problemas [12–14] em alguns dos modelos citados e em outros concluiu-se que a gravitação geral apresentava apenas pequenas correções [10] para o caso newtoniano.

Nesta dissertação, procuraremos resolver as equações da gravitação geral considerando a métrica de Weyl, que representa um espaço-tempo estático com simetria axial e assumindo que nossa fonte de campo gravitacional pode ser representada por um fluido perfeito. Uma forma mais realista de representar uma galáxia é através da métrica para um espaço-tempo estacionário com simetria axial [3, 4]. No entanto, a resolução das equações de campo de Einstein não é uma tarefa fácil e, por isso, optamos por iniciar nossa busca por soluções que representem galáxias utilizando a métrica de Weyl, que possui uma forma mais simples.

O conteúdo desta dissertação será o seguinte: no segundo capítulo faremos uma revisão de alguns aspectos matemáticos importantes para a relatividade geral. Vamos apresentar algumas características dos espaços curvos, mostrar como fazer transformações gerais de coordenadas para alguns objetos matemáticos como vetores e tensores, iremos encontrar a derivada covariante e os símbolos de Christoffel e a relação destes últimos com o tensor métrico, além disso, obteremos as equações para a geodésica, o tensor de energia-momento de um fluido perfeito e o tensor de Riemann.

No terceiro capítulo faremos uma pequena revisão de relatividade geral, apresentaremos os princípios da equivalência e da covariância geral, encontraremos o limite newtoniano da relatividade geral e, utilizando argumentos qualitativos, obteremos as equações de campo de Einstein.

No quarto capítulo vamos encontrar a métrica de Weyl para regiões onde há uma distribuição de matéria e para o vácuo. Além disso, através de um exemplo de solução da métrica de Weyl no vácuo,

a solução de Schwarzschild, vamos mostrar que as interpretações das soluções das equações de Einstein para a métrica de Weyl no vácuo são pouco intuitivas.

No quinto capítulo, vamos obter algumas soluções particulares para as equações de campo de Einstein (3.17) quando a métrica do espaço-tempo é a métrica de Weyl e a fonte do campo gravitacional pode ser representada pelo tensor de energia momento para um fluido perfeito.

No último capítulo apresentaremos nossas conclusões e perspectivas futuras.

2 REVISÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo faremos uma breve revisão de alguns conceitos matemáticos que serão utilizados no presente trabalho [15–19], falaremos sobre algumas diferenças entre espaços planos e curvos. Veremos como calcular transformações de coordenadas generalizadas e derivadas que sejam covariantes gerais, neste processo, obteremos os símbolos de Christoffel e a relação desses com o tensor métrico. Por fim, encontraremos a equação da geodésica, o tensor de Riemann e o tensor de energia-momento para um fluido perfeito.

2.1 ESPAÇOS CURVOS

Nesta seção faremos algumas considerações sobre espaços planos e curvos.

Vamos começar com um exemplo intuitivo de superfície curva, o nosso planeta, que pode ser representado de forma aproximada por uma esfera. Vamos observar primeiro que não é possível enrolar uma folha plana de papel na forma de uma esfera sem distorcê-la. Isso reflete a seguinte característica dos espaços curvos, a de que não é possível cobrir nenhuma parte finita de uma superfície curva usando um sistema de coordenadas euclidiano¹ satisfazendo a lei de Pitágoras. Outra observação a ser feita é que para nós, que estamos sobre a Terra e somos muito pequenos em relação ao seu tamanho total, a superfície da Terra parece aproximadamente plana. Esta observação nos leva a outra característica importante dos espaços curvos, regiões infinitesimalmente pequenas de um espaço curvo podem ser consideradas como localmente planas.

Assim, se estamos em um espaço plano em duas dimensões podemos usar um sistema de coordenadas euclidiano (ξ_1, ξ_2) para cobrir todo o espaço, e a distância entre dois pontos (ξ_1, ξ_2) e $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$ será dada pela lei de Pitágoras

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2. \quad (2.1)$$

No entanto, se estamos em um espaço curvo em duas dimensões, só podemos cobrir todo o espaço se escolhermos um sistema de coor-

¹Em um sistema de coordenadas Euclidiano, a unidade de distância não varia com a posição.

denadas não euclidiano (x_1, x_2) e a distância entre dois pontos (x_1, x_2) e $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ será calculada por uma generalização da lei de Pitágoras dada por

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + g_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2$$

onde

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)^2 \\ g_{12} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Mais a frente veremos que os termos g_{ij} , são componentes de um objeto matemático chamado de tensor, que neste caso possui o nome de tensor métrico. Outra consideração a ser feita é que os espaços em que é possível calcular a distância entre seus pontos são chamados de espaços métricos e a função utilizada para o cálculo das distâncias, ds^2 , é chamada métrica. Além disso, todas as propriedades dos espaços métricos podem ser obtidas a partir do tensor métrico.

Nesta seção foram apresentadas algumas consideração e sobre espaços planos e curvos. Na seção seguinte veremos como fazer uma mudança de coordenadas em um espaço curvo.

2.2 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Nesta seção veremos como fazer transformações de coordenadas gerais para escalares, vetores, tensores e densidades escalares e tensores.

Como as equações da relatividade geral devem ser invariantes por transformações de coordenadas gerais, precisamos saber como os objetos matemáticos contidos nas equações se transformam. O caso mais simples é o dos escalares, que são invariantes sob transformações de coordenadas. O exemplo mais evidente de escalar são os números puros como 0, 23 e π e, um outro exemplo, é o tempo próprio $d\tau$. O segundo caso mais simples é o dos vetores, as componentes dos vetores podem se transformar de duas formas diferentes. Nesta dissertação, usaremos a convenção da maioria dos livros em que os *vetores con-*

travariantes, denotados com índice em cima V^μ , são os que sob uma transformação de coordenadas $x^\mu \longrightarrow x'^\mu$ se transformam da seguinte forma

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.3)$$

Já os *vetores covariantes*, denotados com índice embaixo U_μ , são os que sob uma transformação de coordenadas $x^\mu \longrightarrow x'^\mu$ se transformam como

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu. \quad (2.4)$$

Um exemplo de vetor covariante é o gradiente de um campo escalar ϕ , que sob uma transformação de coordenadas se transforma como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}, \quad (2.5)$$

que é a mesma forma da Eq.(2.4).

Os *tensores* podem ser vistos como generalizações dos vetores, se um tensor só tem índices em cima é chamado contravariante, se só tem índices em baixo é covariante e se possui índices tanto em cima como em baixo é chamado tensor misto. As transformações de coordenadas das componentes dos tensores são produtos de transformações de componentes de vetores, sob uma transformação de coordenadas $x \longrightarrow x'$ um tensor geral $T_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}$ se transforma como

$$T_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\eta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \dots T^{\delta\eta\dots}_{\rho\sigma\dots} \quad (2.6)$$

Um exemplo importante de tensor é o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que é definido como

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (2.7)$$

onde x^μ é um sistema de coordenadas geral, ξ^α é um sistema de coordenadas localmente inercial e $\eta_{\alpha\beta}$ é o tensor de Minkowski dado por

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Sob uma transformação de coordenadas $x^\mu \longrightarrow x'^\mu$, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ se transforma como

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \\ &= g_{\lambda\kappa} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Vemos que $g_{\mu\nu}$ se transforma como um tensor covariante, como se esperaria que fosse. O tensor métrico contravariante $g^{\mu\nu}$ é o inverso do tensor métrico covariante e, por isso, pode ser definido como

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda$$

onde δ_ν^λ é um tensor misto, chamado símbolo de Kronecker, que possui a seguinte definição

$$\delta_\nu^\lambda \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = \nu \\ 0 & \text{se } \lambda \neq \nu \end{cases}, \quad (2.10)$$

e que apresenta a propriedade interessante de ter sempre as mesmas componentes em todos os sistemas de coordenadas.

Outros dois objetos matemáticos que vamos precisar são as densidades escalares e tensoriais, um exemplo destas densidades é o determinante do tensor métrico

$$g \equiv -\text{Det}(g_{\mu\nu}). \quad (2.11)$$

Como já foi visto o tensor métrico se transforma de acordo com (2.9), se calculamos os determinantes das matrizes desta equação, vamos obter

$$\begin{aligned} \text{Det}(g'_{\mu\nu}) &= \text{Det}\left(g_{\lambda\kappa} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\right) \\ &= \text{Det}(g_{\lambda\kappa}) \text{Det}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right) \text{Det}\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\right) \\ g' &= g \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $|\partial x / \partial x'|$ é o determinante de $(\partial x^\lambda / \partial x'^\mu)$ e é chamado de *Jaco-*

biano da transformação $x' \rightarrow x$. Vemos que g se transforma como um escalar a menos do termo com o Jacobiano e, por isso, é chamado de *densidade escalar*. Analogamente, quantidades que se transformam como um tensor a menos de termos com Jacobiano são chamadas de *densidades tensoriais*. Um exemplo importante de densidade tensorial é o elemento de volume d^4x , que sob uma transformação geral de coordenadas $x \rightarrow x'$ se transforma como

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x, \quad (2.13)$$

considerando a equação (2.12), vemos que o produto $\sqrt{g}d^4x$ será um elemento de volume invariante sob qualquer transformação de coordenadas.

Nesta seção vimos como realizar transformações de coordenadas gerais para alguns objetos matemáticos importantes para a relatividade geral como vetores e tensores. Na próxima seção veremos como calcular a derivada covariante de vetores e tensores.

2.3 DERIVADA COVARIANTE

Nesta seção veremos que as derivadas usuais não são invariantes sob transformações gerais de coordenadas e obteremos uma outra derivada, a derivada covariante, que possui esta invariância. Além disso, é importante ressaltar que as equações de campo da relatividade geral são equações tensoriais, por isso, é relevante encontrar uma forma de calcular derivadas que também possuam caráter tensorial.

Já vimos como os vetores devem se transformar quando fazemos uma mudança de coordenadas geral $x \rightarrow x'$, agora veremos como se transforma a diferencial de um vetor:

$$\begin{aligned} dA'_\mu &= d\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu\right) \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dA_\nu + A_\nu d\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right) \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dA_\nu + A_\nu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu \partial x'^\kappa} dx'^\kappa. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vemos que a diferencial das componentes covariantes de um vetor só se transforma como (2.4) se os termos com derivada segunda forem zero, ou seja, se as coordenadas x^ν forem funções lineares das coordenadas

x'^μ e vice-versa. O mesmo ocorre se nós calculamos a sua derivada em relação às coordenadas $\partial A_\mu / \partial x^\kappa$, aparecem derivadas segundas, e a derivada em relação às coordenadas das componentes covariantes dos vetores só será invariante por uma transformação geral de coordenadas se estas derivadas segundas forem zero. O análogo ocorre com as componentes contravariantes dos vetores. Portanto, devemos encontrar uma forma de derivar e diferenciar vetores que seja invariante sob transformações de coordenadas gerais. A diferencial de um vetor pode ser calculada como a diferença entre o vetor A_μ localizado em x_μ e o vetor $A_\mu + dA_\mu$ localizado em $x_\mu + dx_\mu$, no entanto, em espaços curvos a forma como um vetor se transforma depende de sua localização. Por isso, para que a diferencial de um vetor se transforme como (2.4) ou (2.3), os dois vetores a serem subtraídos devem estar localizados no mesmo ponto, ou seja, devemos transportar um dos vetores para o ponto em que o outro se encontra, ao mesmo tempo, esse transporte tem que ser feito de modo que no espaço plano, que pode ser representado pelas coordenadas galileanas², a diferencial do espaço curvo se reduza à diferencial ordinária. A solução é fazer um transporte paralelo³, pois, no espaço plano este tipo de transporte não altera o valor das componentes do vetor. Já nos espaços curvos, se realizamos um transporte paralelo no vetor A_μ do ponto x_μ para o ponto $x_\mu + dx_\mu$ ele irá assumir um valor distinto do vetor que está localizado neste ponto, $A_\mu + dA_\mu$, que iremos chamar de $A_\mu + \delta A_\mu$, e a diferença entre estes dois vetores localizados em $x_\mu + dx_\mu$ será

$$\begin{aligned} DA_\mu &= (A_\mu + dA_\mu) - (A_\mu + \delta A_\mu) \\ &= dA_\mu - \delta A_\mu. \end{aligned} \quad (2.15)$$

O valor de δA_μ depende do valor das componentes do vetor A_μ , e essa dependência deve ser linear porque o vetor resultante da soma de outros dois deve se transformar da mesma forma que estes últimos. Portanto, δA_μ terá a seguinte forma

$$\delta A_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\beta} A_\nu dx^\beta \quad (2.16)$$

onde $\Gamma^\nu_{\mu\beta}$ são quantidades que variam com a variação do vetor e com a

²O sistema de coordenadas galileanas é o sistema de coordenadas que representa um referencial inercial com as coordenadas espaciais dadas pelas coordenadas cartesianas (x, y, z) e a coordenada temporal dada por $-ct$, de forma que $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ [15].

³Quando realizamos um transporte paralelo em um vetor, nós mudamos a sua posição mas, mantemos o vetor “apontando” na mesma direção e sentido.

variação de coordenadas. Essas quantidades são chamadas de *Símbolos de Christoffel*. O valor de $\Gamma^\nu_{\mu\beta}$ nas coordenadas galileanas deve ser zero de forma que DA_μ volte a ser dA_μ , por esse motivo constatamos que $\Gamma^\nu_{\mu\beta}$ não é um tensor pois, um tensor que é zero em um sistema de coordenadas deve ser zero em todos os outros. Para saber como deve ficar a diferencial das componentes contravariantes de um vetor DA^μ , vamos lembrar que o valor dos escalares é sempre o mesmo em qualquer sistema de coordenadas ou posição no espaço, conseqüentemente

$$Dc = dc \implies \delta c = 0, \quad (2.17)$$

onde c é um escalar qualquer. Assim, vamos aplicar esse fato ao valor do produto escalar de dois vetores U^μ e V_μ

$$\begin{aligned} \delta(U^\mu V_\mu) &= V_\mu \delta U^\mu + U^\mu \delta V_\mu = 0 \\ \implies V_\mu \delta U^\mu &= -U^\mu \delta V_\mu = -U^\mu \Gamma^\nu_{\mu\beta} V_\nu dx^\beta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como os índices são arbitrários podemos trocar μ por ν para obter

$$V_\mu \delta U^\mu = -V_\mu \Gamma^\mu_{\nu\beta} U^\nu dx^\beta,$$

e como V_μ é um vetor qualquer, pode ser eliminado para obtermos o valor da variação de um vetor covariante sob um deslocamento paralelo

$$\delta U^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\beta} U^\nu dx^\beta. \quad (2.19)$$

Finalmente, substituindo (2.16) e $dA_\mu = (\partial A_\mu / \partial x^\beta) dx^\beta$ em (2.15), obtemos

$$DA_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\beta} - \Gamma^\nu_{\mu\beta} A_\nu \right) dx^\beta. \quad (2.20)$$

analogamente, para as componentes contravariantes de um vetor obtemos

$$DA^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\nu\beta} A^\nu \right) dx^\beta, \quad (2.21)$$

Nas duas últimas equações acima podemos identificar que as partes entre parênteses são a generalização da derivada em relação às coordenadas para os espaços curvos. Essas derivadas são chamadas de *derivadas covariantes* dos vetores A^μ e A_μ respectivamente, e são denotadas como $A^\mu_{;\beta}$ e $A_{\mu;\beta}$, de modo que

$$\nabla_\beta A_\mu = A_{\mu;\beta} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\beta} - \Gamma^\nu_{\mu\beta} A_\nu. \quad (2.22)$$

e

$$\nabla_\beta A^\mu = A^\mu_{;\beta} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\nu\beta} A^\nu \quad (2.23)$$

Podemos ver que em coordenadas galileanas a derivada covariante se reduz à derivada comum pois, $\Gamma^\nu_{\mu\beta} = 0$, além disso, como uma consequência de (2.17) concluímos que a derivada covariante de uma constante é igual sua derivada ordinária. Para saber como deve ficar a derivada covariante de um tensor, vamos primeiro calcular o deslocamento paralelo. Para facilitar nosso trabalho vamos escrever um tensor como o produto de dois vetores $A^{\mu\nu} = C^\mu D^\nu$

$$\begin{aligned} \delta A^{\mu\nu} &= \delta (C^\mu D^\nu) = D^\nu \delta C^\mu + C^\mu \delta D^\nu \\ &= -D^\nu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} C^\alpha dx^\beta - C^\mu \Gamma^\nu_{\alpha\beta} D^\alpha dx^\beta \\ \Rightarrow \delta A^{\mu\nu} &= - \left(A^{\mu\alpha} \Gamma^\nu_{\alpha\beta} + A^{\alpha\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \right) dx^\beta \end{aligned} \quad (2.24)$$

e substituindo o resultado acima em $DA^{\mu\nu} = dA^{\mu\nu} - \delta A^{\mu\nu} \equiv A^{\mu\nu}_{;\beta} dx^\beta$ podemos concluir que a derivada covariante das componentes contravariantes de um tensor tem a forma

$$A^{\mu\nu}_{;\beta} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} A^{\mu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^{\alpha\nu}. \quad (2.25)$$

Procedendo da mesma forma, podemos chegar às equações para a derivada covariante das componentes mistas de um tensor A^μ_ν e das componentes covariantes de um tensor $A_{\mu\nu}$

$$A^\mu_{\nu;\beta} = \frac{\partial A^\mu_\nu}{\partial x^\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} A^\mu_\alpha + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha_\nu \quad (2.26)$$

e

$$A_{\mu\nu;\beta} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} A_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} A_{\mu\alpha}. \quad (2.27)$$

Para tensores de ordem maior devemos usar a regra de adicionar um termo $-\Gamma^\nu_{\mu\beta} A_\nu$ para cada índice covariante e um termo $+\Gamma^\mu_{\nu\beta} A^\nu$ para cada índice contravariante. Podemos usar a derivada covariante para mostrar que os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos seus índices covariantes, para isso, vamos escrever um vetor A_μ como

o gradiente de um escalar $A_\mu = \partial\phi/\partial x^\mu$, dessa forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \\ \Rightarrow A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} &= (\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}) \frac{\partial \phi}{\partial x^\kappa}.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Em coordenadas galileanas o lado esquerdo da equação acima é zero, como a derivada covariante de um vetor é um tensor, então se seu valor é zero nas coordenadas galileanas também é zero em todas as outras coordenadas e, portanto,

$$\Gamma^\kappa_{\nu\mu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu}.\quad (2.29)$$

Para saber como os símbolos de Christoffel se transformam sob uma mudança de coordenadas basta comparar como se transformam os dois lados da derivada covariante, ao fazer isso encontramos

$$\Gamma^\kappa_{\nu\mu} = \Gamma'^\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}.\quad (2.30)$$

A equação acima mostra mais uma vez que os símbolos de Christoffel não são tensores pois, eles só se transformam como tensores se as coordenadas x^μ forem funções lineares das coordenadas x'^ν , e vice-versa.

Nesta seção vimos como calcular derivadas covariantes e encontramos os símbolos de Christoffel. Na seção seguinte mostraremos que os símbolos de Christoffel estão relacionados com o tensor métrico.

2.4 RELAÇÃO ENTRE OS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL E O TENSOR MÉTRICO

Nesta seção veremos que os símbolos de Christoffel podem ser expressos em termos do tensor métrico.

Para encontrar a relação entre os símbolos de Christoffel e o tensor métrico primeiro precisamos mostrar que a derivada covariante do tensor métrico é zero, para isso, vamos usar a seguinte relação [18]

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu.\quad (2.31)$$

Aplicando a derivada covariante dos dois lados da equação acima obtemos

$$A_{\mu;\beta} = (g_{\mu\nu} A^\nu)_{;\beta} = A^\nu g_{\mu\nu;\beta} + g_{\mu\nu} A^\nu_{;\beta}.\quad (2.32)$$

A relação da equação (2.31) é válida para qualquer vetor ou tensor, inclusive para $A_{\mu;\beta}$ que é dado pela equação (2.22), de modo que

$$A_{\mu;\beta} = g_{\mu\nu} A^\nu_{;\beta}, \quad (2.33)$$

portanto, o termo $A^\nu g_{\mu\nu;\beta}$ da equação (2.32) deve ser zero, e como A^ν é um vetor qualquer, então

$$g_{\mu\nu;\beta} = 0. \quad (2.34)$$

Assim, se aplicamos a definição (2.27) para $g_{\mu\nu;\beta}$ vamos encontrar que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\beta} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} &= \Gamma_{\nu,\mu\beta} + \Gamma_{\mu,\nu\beta}. \end{aligned}$$

Permutando os índices μ, ν e β , encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} &= \Gamma_{\mu,\beta\nu} + \Gamma_{\beta,\mu\nu} \\ -\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} &= -\Gamma_{\beta,\nu\mu} - \Gamma_{\nu,\beta\mu}, \end{aligned}$$

e somando as últimas três equações, lembrando que os símbolos de Christoffel são simétricos em seus índices covariantes, neste caso em relação aos índices covariantes depois da vírgula, chegamos à relação entre os símbolos de Christoffel e o tensor métrico

$$\Gamma_{\mu,\nu\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} \right).$$

Agora usando $g^{\alpha\mu}$ para subir o índice μ de $\Gamma_{\mu,\nu\beta}$ encontramos a relação acima de uma forma alternativa

$$\Gamma^\alpha_{\nu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} \right).$$

Nesta seção vimos que a derivada covariante do tensor métrico é zero e, a partir disso, encontramos a relação entre os símbolos de Christoffel e o tensor $g_{\mu\nu}$. Na seção seguinte obteremos a equação de trajetória para espaços curvos.

2.5 EQUAÇÃO DA GEODÉSICA

Nesta seção veremos como obter a trajetória de uma partícula em um espaço curvo.

Sabemos que a trajetória de uma partícula em três dimensões na ausência de forças é uma linha reta e, além disso, que esta trajetória é o menor caminho ligando o ponto inicial e final. Por isso, para generalizar a equação de trajetória vamos procurar por uma curva em que o comprimento de arco s é a menor distância entre um certo ponto inicial p_i e um ponto final p_f

$$s = \int_{p_i}^{p_f} ds = \textit{extremo}. \quad (2.35)$$

Vamos descrever nossa curva em termos de um parâmetro arbitrário λ que possui sempre os mesmos valores nos pontos p_i e p_f para todas as curvas comparadas, além disso, vamos usar a definição de ds^2

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.36)$$

Se substituimos (2.36) em (2.35) encontramos

$$s = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = \textit{extremo}. \quad (2.37)$$

Comparando a equação acima com a equação do princípio da mínima ação

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dL(q_i, \dot{q}_i, t)}{dt} dt = 0 \quad (2.38)$$

onde $\dot{q}_i = dq_i/dt$, podemos fazer a seguinte identificação

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} = \sqrt{F}, \quad (2.39)$$

onde podemos fazer as seguintes substituições: $t \rightarrow \lambda$, $q_i \rightarrow x^\mu$ e $(\dot{q}_i = dq_i/dt) \rightarrow (\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda)$. Aplicando as equações de Euler-Lagrange

para a lagrangiana acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{F}} \left[-\frac{1}{2F} \frac{dF}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Substituindo F por $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} &= 2g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) &= 2 \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu \\ \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Considerando que estamos procurando pela equação da geodésica, ou seja, pela equação da curva para qual s é um extremo, concluímos a partir das equações (2.37) e (2.39) que, para esta curva, F é constante. Usando esta conclusão e substituindo as relações das equações acima, obtemos

$$g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu + \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Por fim, utilizando a relação

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} g_{\sigma\beta} + \Gamma^\sigma_{\nu\beta} g_{\sigma\alpha}$$

e multiplicando a equação por $g^{\alpha\beta}$, encontramos a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma^\beta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (2.42)$$

Nesta seção utilizamos o princípio da mínima ação para generalizar a equação de trajetória da física newtoniana. Na seção seguinte veremos como podemos saber se um espaço é plano ou curvo.

2.6 TENSOR DE RIEMANN

Nesta seção veremos que podemos identificar se um espaço é curvo ou plano utilizando o tensor de Riemann.

Na Seção (2.3) vimos que dados dois vetores, A_μ localizado em x_μ , e $A_\mu + dA_\mu$ localizado em $x_\mu + dx_\mu$. Se estamos em um espaço plano e realizamos um transporte paralelo em A_μ de x_μ para $x_\mu + dx_\mu$, o valor que as componentes do vetor A_μ irão assumir no ponto $x_\mu + dx_\mu$ será o mesmo valor das componentes do vetor localizado neste ponto, ou seja, $A_\mu + dA_\mu$. No entanto, se estamos em um espaço curvo e realizamos o mesmo transporte paralelo as componentes do vetor A_μ irão assumir um valor em $x_\mu + dx_\mu$ diferente do valor das componentes do vetor localizado neste ponto, que será dado por $A_\mu + \delta A_\mu$. Assim, concluímos que o termo δA_μ está associado a curvatura do espaço, e que podemos usar esta quantidade para obter uma forma de quantificar a curvatura do espaço. Neste ponto, vamos lembrar um resultado importante dos transportes paralelos, o valor que as componentes do vetor assumem após o transporte paralelo depende da trajetória percorrida e, uma consequência disso que nos interessa é que se realizamos um transporte paralelo em um vetor ao longo de uma trajetória fechada ao retornar ao ponto inicial o valor de suas componentes será diferente do valor das componentes antes do transporte. Para calcular a diferença entre o valor das componentes do vetor antes e depois de sofrer um transporte paralelo ao longo de um caminho fechado vamos considerar um espaço curvo bidimensional como na Figura 1.

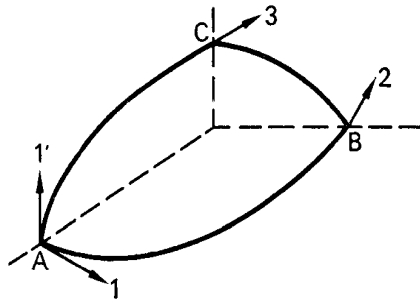


Figura 1 – Na figura acima vemos uma superfície curva bidimensional. Fonte [15].

A Figura 1 mostra o vetor 1 no ponto A que após sofrer um transporte paralelo ao longo da curva AB se transforma no vetor 2, a seguir o vetor sofre outro transporte paralelo ao longo da curva BC e se transforma no vetor 3 e, por último, o vetor é paralelamente transportado ao longo da curva CA voltando ao ponto A mas agora, se transformando no vetor 1' diferente de 1. Se integramos a variação do vetor δA_ν através do percurso fechado percorrido vamos obter a diferença total ΔA_ν entre o vetor no início e no final do percurso

$$\Delta A_\nu = \oint \delta A_\nu,$$

e usando a equação (2.16), encontramos

$$\Delta A_\nu = \oint \Gamma^\sigma_{\nu\mu} A_\sigma dx^\mu.$$

Utilizando a generalização do teorema de Stokes [15]

$$\oint A_\nu dx^\nu = \frac{1}{2} \int df^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} \right)$$

e considerando que a área infinitesimal dentro da curva é dada por $\Delta f^{\lambda\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta A_\nu &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\Gamma^\sigma_{\nu\mu} A_\sigma)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial (\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A_\sigma)}{\partial x^\mu} \right] \Delta f^{\lambda\mu} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma^\sigma_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} A_\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} A_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu} \right) \Delta f^{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Utilizando a equação para o transporte paralelo do vetor A_μ [18]

$$\frac{dA_\mu}{d\tau} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} A_\sigma,$$

podemos fazer a substituição $\partial A_\mu / \partial x^\nu = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma$ na equação (2.43), encontrando

$$\Delta A_\nu = \frac{1}{2} R^\sigma_{\nu\lambda\mu} A_\sigma \Delta f^{\lambda\mu}$$

onde, $R^\sigma_{\nu\lambda\mu}$ é conhecido como tensor de curvatura ou tensor de Rie-

mann e é dado pela equação

$$R^\sigma{}_{\nu\lambda\mu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}. \quad (2.44)$$

Vemos que o tensor de Riemann pode ser usado para identificar se um espaço é plano ou curvo, isso porque ele depende dos símbolos de Christoffel e de suas derivadas, e como já foi visto os símbolos de Christoffel se anulam para espaços planos e, como consequência, $R^\sigma{}_{\nu\lambda\mu} = 0$ para espaços sem curvatura. Além disso, se contraímos o índice contravariante com um dos índices covariantes do tensor de Riemann obtemos o tensor de Ricci, que aparece nas equações de campo da relatividade geral

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (2.45)$$

Nesta seção partindo do transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho fechado em um espaço curvo, obtivemos o tensor de Riemann que estabelece um critério para a curvatura para um dado espaço-tempo. Na próxima seção veremos como generalizar os conceitos de energia e momento da mecânica clássica.

2.7 TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO

Nesta seção vamos estudar o tensor de energia-momento e sua interpretação.

Na formulação da relatividade restrita, o quadrivetor de energia-momento de uma partícula é dado por [17]

$$P = \frac{m}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

onde m é a sua massa de repouso, c é a velocidade da luz no vácuo, v é o módulo da velocidade e v_x , v_y e v_z são as componentes da velocidade da partícula nas direções x , y e z , respectivamente. Este quadrivetor expressa a energia e o momento de uma partícula de uma forma relativística. Outro objeto matemático de interesse na teoria da relatividade é o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$. Fisicamente o tensor $T^{\mu\nu}$ significa o fluxo da μ -ésima componente do quadrivetor de energia-momento pela superfície em que x^ν é constante, de forma que [19]:

- T^{00} é o fluxo de energia por uma superfície de tempo constante, ou seja, é a densidade de energia
- $T^{i0} = T^{i0}$, onde $i = 1, 2, 3$, pode ser entendido tanto como o fluxo de energia pela superfície x^μ quanto como a μ -ésima componente da densidade de momento linear
- T^{ij} , onde i e $j = 1, 2, 3$, é o fluxo da i -ésima componente do momento linear pela superfície em que x^j é constante, ou seja, os T^{ij} 's são as “tensões”.

Podemos desenvolver uma equação de conservação para energia e momento para cada sistema que considerarmos, por exemplo, nos sistemas fechados a energia e o momento sempre são conservados e a equação de conservação fica

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (2.47)$$

Além disso, na mecânica clássica uma outra lei de conservação que devemos considerar é a do momento angular. A generalização do momento angular clássico

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} \quad (2.48)$$

é dada pelo tensor momento angular [17]

$$M^{\mu\nu\alpha} = T^{\mu\nu}x^\alpha - T^{\alpha\nu}x^\mu, \quad (2.49)$$

assim, a equação de conservação para um sistema fechado será

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\alpha}_{;\nu} &= T^{\mu\nu}_{;\nu}x^\alpha + T^{\mu\nu}\delta_\nu^\alpha - T^{\alpha\nu}_{;\nu}x^\mu - T^{\alpha\nu}\delta_\nu^\mu = 0 \quad (2.50) \\ \Rightarrow T^{\mu\alpha} - T^{\alpha\mu} &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, em um sistema fechado o momento angular só é conservado se o tensor de energia-momento for simétrico.

Nesta seção vimos que os conceitos de energia e momento são generalizados pelo tensor de energia-momento. Na seção seguinte veremos como fica o tensor de energia momento para fluidos perfeitos.

2.7.1 Tensor de Energia-Momento para fluidos perfeitos

Nesta seção obteremos o tensor de energia-momento para um fluido perfeito.

Fluidos perfeitos são fluidos idealizados em que se estamos localmente em repouso em relação a um elemento do sistema observaremos o fluido ao redor como tendo somente uma pressão isotrópica, de modo que

$$T^{\mu\nu(0)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

onde p é a pressão, ρ é a densidade de massa de repouso e o índice (0) serve para lembrar que o tensor está expresso em um sistema de coordenadas que está localmente em repouso em relação a um elemento do sistema. No entanto, iremos fazer uma transformação de coordenadas do sistema que se move junto com o fluido para um outro em que estamos em repouso vendo o fluido se mover com uma velocidade \mathbf{v} . Neste caso devemos fazer a transformação de coordenadas (no espaço plano)

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu(\mathbf{v}) \Lambda^\beta_\nu(\mathbf{v}) T^{\mu\nu(0)}, \quad (2.52)$$

onde $T^{\mu\nu}$ representa o tensor de energia-momento para um fluido perfeito agora no sistema de coordenadas em que observamos o fluido se mover com uma velocidade \mathbf{v} , $T^{\mu\nu(0)}$, como já foi dito, representa o tensor de energia-momento no sistema de coordenadas que se move junto com fluido e $\Lambda^\mu_\alpha(\mathbf{v})$ representa as transformações de Lorentz e é dado por

$$\begin{aligned} \Lambda^i_j(\mathbf{v}) &= \delta_{ij} + v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}} \\ \Lambda^0_j(\mathbf{v}) &= \gamma \frac{v_j}{c}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde $\gamma = \left(1 - (\mathbf{v}/c)^2\right)^{-1/2}$. Substituindo na equação (2.52) e efetuando os cálculos, encontramos

$$\begin{aligned} T^{ij} &= p\delta_{ij} + \left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) \frac{v_i v_j}{1 - (\mathbf{v}/c)^2} \\ T^{i0} &= \left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) \frac{v_i}{1 - (\mathbf{v}/c)^2} \\ T^{00} &= \frac{\rho c^2 + p\mathbf{v}^2/c^2}{1 - (\mathbf{v}/c)^2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

As equações acima podem ser sintetizadas na forma do seguinte tensor

contravariante

$$T^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + \left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) U^\mu U^\nu, \quad (2.55)$$

onde U^μ é o quadrivetor velocidade dado por

$$\begin{aligned} U^0 &= \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}} \\ \mathbf{U} &= \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{\mathbf{v}}{c} U^0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

de forma que $U^\mu U_\mu = -1$. Em sistemas que não são fechados a equação de conservação será dada por

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = f^\mu, \quad (2.57)$$

onde f^μ é o quadrivetor da densidade de força externa. Se queremos saber a equação de conservação para a energia devemos considerar na equação acima apenas os termos do tipo tempo

$$\begin{aligned} T^{0\nu}{}_{;\nu} &= T^{00}{}_{;0} + T^{0i}{}_{;i} = c q^i{}_{;i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \omega}{\partial t} = f^0 \\ \Rightarrow \quad \nabla \cdot [(\omega + p) \mathbf{v}] + \partial \omega / \partial t &= c f^0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde \mathbf{q} é a densidade de momento e ω é a densidade de energia, que são dadas pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} q^i &= T^{i0} = \left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) \frac{v_i}{1 - (\mathbf{v}/c)^2} \\ \omega &= T^{00} = \frac{\rho c^2 + p \mathbf{v}^2 / c^2}{1 - (\mathbf{v}/c)^2}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

O limite newtoniano da equação (2.58) ocorre quando $\omega = c^2 \rho$, $p \ll c^2 \rho$ e $f^0/c \ll 1$, de modo que ela fica na forma

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \partial \rho / \partial t = 0 \quad (2.60)$$

que pode ser reconhecida como a equação da continuidade. A parte espacial da equação (2.57) é dada por

$$T^j{}_{i;j} = p_{;i} + (q_i v^j)_{;j} + \partial q_i / \partial t = f_i, \quad (2.61)$$

e se substituirmos q_i e usamos a equação (2.58) na equação (2.61), ob-

temos

$$\frac{\omega + p}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p + \left(f_0 + \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} \right) \mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (2.62)$$

Se tomamos o limite newtoniano $\omega = c^2\rho$, $p \ll c^2\rho$ e $\mathbf{v}f_0 \ll \mathbf{f}$ das equações acima, constatamos que elas são uma generalização das equações de Euler

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{f}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.63)$$

Por fim, o tensor que se reduz a (2.55) no espaço plano, é dado por

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) U^\mu U^\nu, \quad (2.64)$$

onde U^μ é $dx^\mu/d\tau$ localmente para um elemento de fluido comóvel.

Neste capítulo obtivemos os principais resultados matemáticos necessários para o desenvolvimento desta dissertação. O próximo passo é aplicar esses resultados para sistemas físicos de interesse. Com esse fim, no próximo capítulo faremos uma breve revisão sobre alguns conceitos importantes da relatividade geral.

3 REVISÃO RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo estudaremos a base física necessária para o desenvolvimento do estudo proposto. Iremos apresentar os princípios da equivalência e da covariância geral, assim como obter o limite newtoniano da relatividade geral e, por fim, encontraremos, utilizando argumentos qualitativos, as equações de campo para a relatividade geral.

3.1 PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA E PRINCÍPIO DA COVARIÂNCIA GERAL

Nesta seção veremos que campos gravitacionais são localmente equivalentes aos referenciais não inerciais.

A igualdade entre a massa gravitacional e a inercial¹ significa que se a força sofrida por um corpo de massa igual a $m_g = m_i = m$ em um campo gravitacional estático e homogêneo é dada por $F_g = mg$ então, a força necessária para fazer esse corpo sair do repouso e se mover com aceleração g é a mesma. Isso levou Einstein a concluir que um corpo em queda livre em um campo gravitacional estático e homogêneo não consegue detectar o campo, pois a força inercial sobre o corpo se cancelará exatamente com a força gravitacional. No entanto, se estamos em queda livre em um campo gravitacional que varia com a posição ou com o tempo, haverá meios de identificar a presença do campo. Outra consideração que deve ser feita é que os campos gravitacionais que são equivalentes aos referenciais não inerciais não se comportam exatamente como os campos gravitacionais que ocorrem na natureza, por exemplo, o campo gravitacional equivalente a um referencial em rotação aumenta com o aumento da distância em relação ao eixo de rotação e, por isso, tende a infinito quando a distância em relação ao eixo de rotação tende para infinito mas, os campos gravitacionais conhecidos sempre tendem a zero quando a distância em relação a fonte do campo tende para infinito. Contudo, se considerarmos apenas uma região do espaço e do tempo em que o campo varia pouco, a força inercial ainda cancela a força gravitacional.

Depois destas observações, podemos estabelecer o princípio da equivalência que diz o seguinte [18]:

“Em cada ponto do espaço-tempo em um campo

¹A massa inercial, m_i , é a massa que aparece na segunda lei de Newton e a massa gravitacional, m_g , é a massa que aparece na lei da gravitação de Newton.

gravitacional arbitrário é possível escolher um ‘sistema de coordenadas localmente inercial’ de modo que, dentro de uma região suficientemente pequena nas vizinhanças do ponto em questão, as leis da natureza ficam na mesma forma que em um sistema de coordenadas Cartesiano não acelerado na ausência de gravitação.”

Aqui a expressão “mesma forma que em um sistema de coordenadas Cartesiano não acelerado” significa mesma forma que na relatividade restrita e “região suficientemente pequena” significa grosseiramente uma região dentro da qual o campo é praticamente constante. Só podemos entender esta última ideia rigorosamente de forma matemática.

O princípio da equivalência pode ser expresso também através do princípio da covariância geral. O princípio da covariância geral é uma forma alternativa do princípio da equivalência, com ele é possível chegar às equações da gravitação e do eletromagnetismo de uma maneira muito mais simples. Este princípio consiste de duas exigências que as equações da relatividade geral devem obedecer:

- na ausência de campo gravitacional as equações obedecem às leis da relatividade restrita;
- as equações devem ser invariantes sob transformações de coordenadas gerais $x \rightarrow x'$.

É possível encontrar muitas equações que são covariantes gerais e que obedecem às leis da relatividade restrita na ausência de campo gravitacional. No entanto, só estamos assegurados pelo princípio da equivalência para construir um sistema de coordenadas localmente inercial em regiões pequenas, dentro das quais o campo gravitacional pode ser considerado constante. Assim, o princípio da covariância geral somente será aplicado a essas regiões pequenas, de forma que, normalmente nossas equações covariantes gerais irão depender somente do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas primeiras.

Nesta seção vimos que o princípio da covariância geral é uma forma mais facilmente aplicável do princípio da equivalência. Na próxima seção iremos encontrar o limite newtoniano para a relatividade geral.

3.2 LIMITE NEWTONIANO

Nesta seção veremos, partindo da equação geodésica (2.42), como obter o limite newtoniano da relatividade geral.

Falar em limite newtoniano significa falar de campos gravitacionais fracos e estacionários e velocidades baixas comparadas com c . Se a velocidade de um corpo é baixa comparada com c , isso implica que $d\mathbf{x}/d\tau \ll c dt/d\tau$, de forma que a equação da geodésica fica

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\beta_{00} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (3.1)$$

Se o campo gravitacional é fraco então o tensor métrico difere por pouco do tensor métrico de Minkowski, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \text{ onde } \|h_{\mu\nu}\| \ll 1. \quad (3.2)$$

Por fim, se o campo gravitacional é estacionário então as componentes do tensor métrico são independentes do tempo, de forma que, as derivadas em relação a coordenada temporal são zero

$$\Gamma^\beta_{00} = -\frac{1}{2} g^{\beta\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.2) na equação acima e considerando apenas termos de primeira ordem em $\eta_{\beta\nu}$, encontramos que os símbolos de Christoffel para um campo gravitacional fraco e estacionário podem ser escritos como

$$\Gamma^\beta_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\beta\nu} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (3.4)$$

Substituindo a equação acima na equação (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} \\ \frac{d^2 t}{d\tau^2} &= 0. \end{aligned}$$

A segunda equação implica que $dt/d\tau$ é constante. Na primeira equação se dividimos $d^2 \mathbf{x}/d\tau^2$ por $(dt/d\tau)^2$ encontramos

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \nabla h_{00}. \quad (3.5)$$

Na física newtoniana sabemos que

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi, \quad (3.6)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional, de modo que, comparando a equação (3.5) com a equação (3.6), concluímos que

$$h_{00} = -2\frac{\phi}{c^2} + c_1,$$

onde c_1 é uma constante. Para saber quanto vale a constante da equação acima, vamos considerar que tanto ϕ quanto h_{00} devem ir a zero no infinito, nesse caso $c_1 = 0$ e

$$g_{00} = -\left(1 + 2\frac{\phi}{c^2}\right) \quad (3.7)$$

Nesta seção vimos que no limite de campos gravitacionais fracos e estacionários e velocidades baixas comparadas com c , a relatividade geral deve tender para a física newtoniana. Na seção seguinte encontraremos a generalização da equação de Poisson para o campo gravitacional na relatividade geral.

3.3 EQUAÇÕES DE CAMPO

Nesta seção, nos baseando no livro [18], vamos encontrar as equações de campo da relatividade geral.

Considere um campo gravitacional forte arbitrário. De acordo com o princípio da equivalência podemos, em um ponto X qualquer do campo, definir um sistema de coordenadas localmente inercial, de forma que no ponto X

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(X) &= \eta_{\mu\nu} \\ \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma}\right)_{x=X} &= 0. \end{aligned}$$

Nesse ponto e em sua redondeza vale a aproximação de campo fraco (3.7) e, além disso, da equação (2.51) sabemos que a componente T_{00} do tensor de energia-momento para um sistema de coordenadas localmente inercial é $T_{00} = c^2 \rho$. Na gravitação newtoniana a equação que

determina o campo gravitacional ϕ é a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (3.8)$$

onde G é a constante gravitacional. Se usamos a equação (3.7) para escrever ϕ/c^2 em termos de g_{00} e o termo T_{00} da equação (2.51) para escrever $c^2 \rho$ em termos de T_{00} , e a seguir substituímos as relações encontradas na equação acima obtemos

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}.$$

Esta equação só é válida para um sistema de coordenadas localmente inercial, mas vamos assumir que no caso de campos gravitacionais arbitrários deve valer uma generalização da equação acima

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

onde $G_{\mu\nu}$ tem de ser uma combinação linear do tensor métrico e suas derivadas primeiras e segundas. Para saber qual deve ser a forma de $G_{\mu\nu}$ vamos fazer as seguintes considerações [18]:

1. Como o lado direito da equação é um tensor de segunda ordem simétrico, então $G_{\mu\nu}$ também deve ser um tensor simétrico.
2. Da equação (2.47) sabemos que o tensor de energia-momento se conserva e, portanto,

$$G^\mu_{\nu;\mu} = 0.$$

3. Vamos supor que $G_{\mu\nu}$ é composto apenas por derivadas de segunda ordem e derivadas de primeira ordem da métrica elevadas ao quadrado.
4. Por fim, no limite newtoniano devemos ter $G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}$.

Como já foi dito anteriormente, na relatividade geral a gravidade é tratada como um encurvamento do espaço-tempo, e o tensor que calcula a curvatura é o tensor de Riemann, além disso, esse tensor é composto de derivadas segundas e derivadas primeiras ao quadrado do tensor métrico, satisfazendo a suposição (3.). Mas, o tensor de Riemann é de quarta ordem e antissimétrico, portanto, $G_{\mu\nu}$ deve ser construído a partir de contrações desse tensor. Os únicos tensores que podem ser obtidos contraindo o tensor $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ são o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\kappa}$ e

o escalar de curvatura $R = R^\mu{}_\mu$. Então, para obedecer a consideração (1.) o tensor $G_{\mu\nu}$ deve ter a seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \quad (3.9)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Aplicando a consideração (2.) encontramos

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = C_1 R^\mu{}_{\nu;\mu} + C_2 \delta^\mu_\nu R_{;\mu} = 0. \quad (3.10)$$

A partir das *identidades de Bianchi* [18]

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (3.11)$$

podemos obter a seguinte relação

$$R_{;\eta} = 2R^\mu{}_{\eta;\mu}. \quad (3.12)$$

Substituindo a relação acima na equação (3.10), encontramos

$$\left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) R_{;\nu} = 0.$$

Existem duas possibilidades, $C_2 = -C_1/2$ ou $R_{;\nu} = 0$. Para mostrar que a primeira possibilidade que está correta, vamos observar que

$$G^\mu{}_\mu = (C_1 + 4C_2) R = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu{}_\mu.$$

Portanto, se $R_{;\nu} = 0$ então $T^\mu{}_{\mu;\nu} = 0$ também mas, isso não ocorre na presença de matéria inhomogênea não relativística. Assim, concluímos que a possibilidade correta é $C_2 = -C_1/2$ de forma que

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right).$$

Por fim, vamos utilizar a consideração (4.)

$$G_{00} = C_1 \left(R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \right) \simeq \nabla^2 g_{00}. \quad (3.13)$$

Na aproximação newtoniana temos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $\|h_{\mu\nu}\| \ll 1$, de modo que a equação acima fica

$$G_{00} \simeq C_1 \left[R_{00} - \frac{1}{2} (-1) R \right] \simeq \nabla^2 g_{00}. \quad (3.14)$$

Sabemos que em sistemas não relativísticos $\|T_{ij}\| \ll \|T_{00}\|$ o que implica $\|G_{ij}\| \ll \|G_{00}\|$ de forma que

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}R &\simeq 0 \\ \Rightarrow R_{ij} &\simeq \frac{1}{2}\eta_{ij}R. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vamos usar a relação acima para encontrar o valor de R na aproximação de campo fraco e estacionário

$$\begin{aligned} R &\simeq R_{kk} - R_{00} \\ &\simeq \frac{3}{2}R - R_{00} \\ \Rightarrow R &\simeq 2R_{00}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Substituindo a expressão acima na equação (3.14) encontramos

$$\begin{aligned} G_{00} &\simeq C_1 \left[R_{00} + \frac{1}{2}(2R_{00}) \right] \simeq \nabla^2 g_{00} \\ \Rightarrow 2C_1 R_{00} &\simeq \nabla^2 g_{00}. \end{aligned}$$

Finalmente, se calculamos o valor de R_{00} lembrando que o campo é fraco e estacionário obtemos

$$G_{00} \simeq 2C_1 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \right) \simeq \nabla^2 g_{00}.$$

Portanto, concluímos que $C_1 = 1$ e, assim, as equações de campo ficam

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.17)$$

utilizando a igualdade $R = -8\pi GT_\lambda^\lambda/c^4$, podemos encontrar uma forma equivalente das equações de campo dada por

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_\lambda^\lambda \right). \quad (3.18)$$

Nesta seção utilizamos a aproximação newtoniana, a equação de Poisson e alguns argumentos qualitativos para obter as equações de campo para a relatividade geral. No próximo capítulo encontraremos o tensor métrico para um espaço-tempo estático com simetria axial e veremos sua relação com a solução de Schwarzschild.

4 ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO COM SIMETRIA AXIAL

Neste capítulo estudaremos a métrica de Weyl, calcularemos suas equações de campo para o vácuo e verificaremos a relação com a solução de Schwarzschild.

4.1 MÉTRICA DE WEYL

Nesta seção obteremos o tensor métrico para um espaço-tempo estático com simetria axial, para as partes interna e externa de uma distribuição de massa.

Einstein publicou seu artigo sobre os fundamentos da relatividade geral em 1916 [1, 2] e, já no ano seguinte, Weyl e Levi-Civita encontraram a métrica e as equações de Einstein para um campo gravitacional estático com simetria axial [20–22]. Campos gravitacionais com simetria axial são importantes porque podem ser usados para modelar galáxias e, de um modo geral, um fluido isolado autogravitante tem simetria axial [23].

No espaço plano, se estamos considerando um campo gravitacional com simetria axial, isso significa simplesmente que, se estamos utilizando coordenadas cilíndricas (r, z, φ) , onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, então o potencial gravitacional não depende da coordenada φ . No espaço curvo vamos generalizar essa ideia fazendo com que, quando existir simetria axial, as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ sejam independentes da coordenada φ que representa o ângulo azimutal. Se, além disso, o campo gravitacional é estático, então as componentes de $g_{\mu\nu}$ também não dependem do tempo t . Porém, mesmo que $g_{\mu\nu}$ seja independente de t e φ , as equações de campo ainda vão nos levar a dez equações diferenciais parciais de duas variáveis espaciais arbitrárias (x_2, x_3) que podem ser (r, z) , relativas às coordenadas cilíndricas, ou coordenadas em algum outro sistema de interesse. Para reduzir e simplificar as equações de campo vamos considerar também que o campo gravitacional é simétrico em relação a uma substituição de t por $-t$ e φ por $-\varphi$. Fisicamente isso significa que a matéria que é fonte do campo gravitacional não está rotacionando e, matematicamente, significa que o elemento de linha ds^2

não possui termos cruzados com dt e $d\varphi$, de modo que

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt}(x_2, x_3) dt^2 + g_{\varphi\varphi}(x_2, x_3) d\varphi^2 + \Phi \\ \Phi &= g_{x_2x_2}(x_2, x_3) dx_2^2 + 2g_{x_2x_3}(x_2, x_3) dx_2 dx_3 + g_{x_3x_3}(x_2, x_3) dx_3^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ainda nos restam cinco funções a serem determinadas, podemos reduzi-las para três utilizando um resultado matemático bastante conhecido [24, 25], esse resultado diz que uma parte de um elemento de linha como Φ sempre pode ser diagonalizada, ficando com a seguinte forma

$$\Phi = \alpha(x_2, x_3)^2 (dx_2^2 + dx_3^2). \quad (4.2)$$

Assim, se $g_{tt}(x_2, x_3) = -\gamma(x_2, x_3)^2$ e $g_{\varphi\varphi}(x_2, x_3) = \beta(x_2, x_3)^2$ podemos escrever o elemento de linha em termos das funções α , β e γ

$$ds^2 = -\gamma(x_2, x_3)^2 dt^2 + \alpha(x_2, x_3)^2 (dx_2^2 + dx_3^2) + \beta(x_2, x_3)^2 d\varphi^2. \quad (4.3)$$

Calculando o tensor de Ricci para esse elemento de linha, encontramos

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{\gamma(x_2, x_3) \left[\beta^{(0,1)}(x_2, x_3) \gamma^{(0,1)}(x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3) \gamma^{(0,2)}(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3)^2 \beta(x_2, x_3)} \\ &+ \frac{\gamma(x_2, x_3) \left[\beta^{(1,0)}(x_2, x_3) \gamma^{(1,0)}(x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3) \gamma^{(2,0)}(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3)^2 \beta(x_2, x_3)}, \\ R_{x_2x_2} &= \frac{\alpha^{(0,1)}(x_2, x_3)^2 + \alpha^{(1,0)}(x_2, x_3)^2 - \alpha(x_2, x_3) \alpha^{(0,2)}(x_2, x_3)}{\alpha(x_2, x_3)^2} \\ &- \frac{\alpha^{(0,1)}(x_2, x_3) \left[\beta^{(0,1)}(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3) \gamma^{(0,1)}(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3) \beta(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3)} \\ &+ \frac{\alpha^{(1,0)}(x_2, x_3) \left[\beta^{(1,0)}(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3) \gamma^{(1,0)}(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3) \beta(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3)} \\ &- \frac{\alpha^{(2,0)}(x_2, x_3)}{\alpha(x_2, x_3)} - \frac{\beta^{(2,0)}(x_2, x_3)}{\beta(x_2, x_3)} - \frac{\gamma^{(2,0)}(x_2, x_3)}{\gamma(x_2, x_3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{x_3 x_3} = & \frac{\alpha^{(0,1)}(x_2, x_3)^2 + \alpha^{(1,0)}(x_2, x_3)^2 - \alpha(x_2, x_3) \alpha^{(2,0)}(x_2, x_3)}{\alpha(x_2, x_3)^2} \\
& + \frac{\alpha^{(0,1)}(x_2, x_3) \left[\beta^{(0,1)}(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3) \gamma^{(0,1)}(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3) \beta(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3)} \\
& - \frac{\alpha^{(1,0)}(x_2, x_3) \left[\beta^{(1,0)}(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3) \gamma^{(1,0)}(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3) \beta(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3)} \\
& - \frac{\alpha^{(0,2)}(x_2, x_3)}{\alpha(x_2, x_3)} - \frac{\beta^{(0,2)}(x_2, x_3)}{\beta(x_2, x_3)} - \frac{\gamma^{(0,2)}(x_2, x_3)}{\gamma(x_2, x_3)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{x_2 x_3} = & \frac{\alpha^{(1,0)}(x_2, x_3) \left[\beta^{(0,1)}(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3) \gamma^{(0,1)}(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3) \beta(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3)} \\
& + \frac{\alpha^{(0,1)}(x_2, x_3) \left[\beta^{(1,0)}(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3) + \beta(x_2, x_3) \gamma^{(1,0)}(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3) \beta(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3)} \\
& - \frac{\beta^{(1,1)}(x_2, x_3)}{\beta(x_2, x_3)} - \frac{\gamma^{(1,1)}(x_2, x_3)}{\gamma(x_2, x_3)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\varphi\varphi} = & - \frac{\beta(x_2, x_3) \left[\beta^{(0,1)}(x_2, x_3) \gamma^{(0,1)}(x_2, x_3) + \beta^{(0,2)}(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3)^2 \gamma(x_2, x_3)} \\
& - \frac{\beta(x_2, x_3) \left[\beta^{(1,0)}(x_2, x_3) \gamma^{(1,0)}(x_2, x_3) + \beta^{(2,0)}(x_2, x_3) \gamma(x_2, x_3) \right]}{\alpha(x_2, x_3)^2 \gamma(x_2, x_3)}
\end{aligned}$$

onde $f^{(m,n)}(x_2, x_3)$ significa derivada da função $f(x_2, x_3)$ de ordem m em relação a x_2 e de ordem n em relação a x_3 . Observamos que

$$R_t^t + R_\varphi^\varphi = \frac{1}{\alpha^2 \beta \gamma} \Delta(\beta \gamma) \quad (4.4)$$

onde

$$\Delta(\beta \gamma) = 2\beta^{(0,1)}\gamma^{(0,1)} + 2\beta^{(1,0)}\gamma^{(1,0)} + \left(\beta^{(0,2)} + \beta^{(2,0)}\right)\gamma + \beta\left(\gamma^{(0,2)} + \gamma^{(2,0)}\right). \quad (4.5)$$

Todas as operações que foram feitas até aqui valem tanto para o espaço

vazio como para onde há matéria, já que são os cálculos das componentes do tensor de Ricci, que aparecem no lado esquerdo das equações de campo de Einstein, ou seja, relativos à geometria do sistema em questão. No entanto, agora vamos nos restringir a examinar como fica a métrica no espaço vazio. A partir da equação (3.18) podemos concluir que na ausência de matéria

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (4.6)$$

portanto, a equação (4.4) fica

$$\begin{aligned} R_t^t + R_\varphi^\varphi &= 0 \\ \Rightarrow \Delta(\beta\gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Assim, concluímos que $\beta\gamma$ é uma função harmônica de (x_2, x_3) , de modo que

$$\beta\gamma = r(x_2, x_3). \quad (4.8)$$

Se $r(x_2, x_3)$ é uma função harmônica, então é possível construir outra função harmônica $z(x_2, x_3)$, que é chamada função conjugada de $r(x_2, x_3)$, de forma que r e z são a parte real e imaginária de uma função analítica complexa $f(z)$ [26, 27]

$$r + iz = f(x_2 + ix_3).$$

Assim, de acordo com [20], a transição de (x_2, x_3) para (r, z) é um mapeamento conforme, fazendo com que a forma (4.2) seja preservada

$$\Phi = \alpha(r, z)^2 (dr^2 + dz^2). \quad (4.9)$$

Portanto, o elemento de linha para um campo gravitacional estático com simetria axial no vácuo em coordenadas “cilíndricas”¹ deve ficar na forma (4.8)

$$ds^2 = -\gamma(r, z)^2 dt^2 + \alpha(r, z)^2 (dr^2 + dz^2) + r^2 \gamma(r, z)^{-2} d\varphi^2. \quad (4.10)$$

Por fim, se substituirmos $\gamma(r, z) = e^{\psi(r, z)}$ e $\alpha(r, z) = e^{\nu(r, z)}$ encontramos a métrica acima na sua forma mais usual

$$ds^2 = -e^{2\psi(r, z)} dt^2 + e^{-2\psi(r, z)} \left[e^{2\nu(r, z)} (dr^2 + dz^2) + r^2 d\varphi^2 \right]. \quad (4.11)$$

Nesta seção encontramos a métrica para um espaço-tempo estático

¹Nem sempre essas coordenadas são interpretadas como coordenadas cilíndricas.

com simetria axial. No restante desta dissertação vamos considerar as formas (4.11) e (4.3), com $(x_2, x_3) = (r, z)$, para a métrica e vamos procurar pela solução para alguns casos de interesse. Na próxima seção veremos como ficam as equações de campo para a métrica de Weyl no vácuo e a sua relação com a solução de Schwarzschild.

4.2 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO PARA MÉTRICA DE WEYL NO VÁCUO

Nesta seção calcularemos as equações (4.6) para a métrica de Weyl e veremos que a interpretação das soluções são pouco intuitivas [4, 28].

Como já foi visto, as equações de campo da relatividade geral para regiões do espaço vazio são dadas por (4.6). Assim, para obter as equações de campo para a métrica (4.11) basta calcular as componentes do tensor de Ricci e igualá-las a zero. Fazendo isso, podemos observar que as componentes R_{tt} e $R_{\varphi\varphi}$ nos fornecem a equação:

$$\begin{aligned} \psi^{(0,2)}(r, z) + \frac{\psi^{(1,0)}(r, z)}{r} + \psi^{(2,0)}(r, z) &= 0 \\ \rightarrow \nabla^2 \psi(r, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Também é possível observar que fazendo $(R_{rr} - R_{zz})/2 + R_{rz}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \nu^{(0,1)}(r, z) + \nu^{(1,0)}(r, z) &= r[-\psi^{(0,1)}(r, z)^2 \\ &+ 2\psi^{(1,0)}(r, z)\psi^{(0,1)}(r, z) + \psi^{(1,0)}(r, z)^2]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A primeira equação é a conhecida equação de Laplace e, em princípio, uma vez que tenhamos determinado $\psi(r, z)$ basta substituí-la na segunda equação para obter a função $\nu(r, z)$. Assim, pode-se dizer que todas as soluções para a métrica de Weyl no vácuo são formalmente conhecidas. Se aproximamos o termo g_{tt} da métrica (4.11) para valores pequenos da função $\psi(r, z)$ vamos obter $g_{tt} \sim -(1 + 2\psi)$, comparando com a aproximação newtoniana (3.7) e sabendo que ψ satisfaz a equação de Laplace é de se esperar que a função ψ seja o análogo do potencial newtoniano. Portanto, poderíamos pensar que se queremos saber qual a solução da métrica de Weyl no vácuo que representa uma distribuição de massa específica com simetria axial basta resolver a equação de Laplace para a distribuição de massa dada e usar o resultado para obter

ν . No entanto, como veremos no exemplo a seguir, se resolvemos a equação de Laplace no espaço plano para uma esfera, por exemplo, no espaço curvo a mesma solução não representa o mesmo objeto. Algumas soluções para as equações de campo para métrica de Weyl no vácuo podem ser encontradas em [3, 4, 29, 30].

A solução de Schwarzschild é a única solução das equações de campo (3.17) no vácuo para um espaço-tempo esfericamente simétrico que tende para o espaço de Minkowski no infinito, a forma mais simples e conhecida desta solução é dada por [4]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2\right]. \quad (4.14)$$

Se transformamos a métrica das coordenadas de Schwarzschild para coordenadas esferoidais prolatas

$$\begin{aligned} r &= m(x+1), \quad \theta = \arccos(y) \\ dr &= m dx, \quad d\theta = -(1-y^2)^{-1/2} dy \end{aligned}$$

onde m é uma constante, $x \geq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$, obtemos

$$ds^2 = - \left(\frac{x-1}{x+1}\right) dt^2 + m^2 \left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx^2 + m^2 \frac{(x+1)^2}{(1-y^2)} dy^2 + m^2 (x+1)^2 (1-y^2) d\varphi^2, \quad (4.15)$$

para que a métrica acima mantenha sua assinatura devemos ter $-1 < y < 1$. Na região fora do raio de Schwarzschild $r > 2m$ ($x > 1$) podemos fazer mais uma transformação de coordenadas dada por

$$\begin{aligned} x &= \frac{R_+ + R_-}{2m} \\ y &= \frac{R_+ - R_-}{2m} \\ dx &= \frac{[m(R_- - R_+) + z(R_- + R_+)] dz + \rho(R_- + R_+) d\rho}{2mR_+R_-} \\ dy &= \frac{\left[z\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right) + m\left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-}\right)\right] dz + \rho\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right) d\rho}{2m} \end{aligned}$$

onde $R_{\pm} = \sqrt{(z \pm m)^2 + \rho^2}$. É importante ressaltar que a correspondência entre as coordenadas esferoidais prolatas (x, y) e as coordenadas canônicas de Weyl (ρ, z) só existe para a região $z \in (-m, m)$ e $\rho = 0$, como está ilustrado na Figura 2.

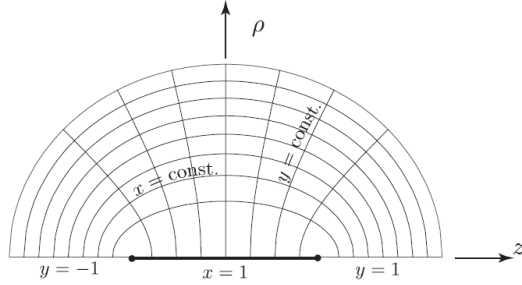


Figura 2 – Coordenadas esféricas prolatas ilustradas em termos das coordenadas canônicas de Weyl. Fonte [4].

Quando aplicamos essa transformação na métrica (4.15), obtemos

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(\frac{R_- + R_+ - 2m}{R_- + R_+ + 2m} \right) dt^2 \\
 & + \left[\frac{(R_- + R_+)^2 - 4m^2}{4R_- R_+} \right] \left(\frac{R_- + R_+ + 2m}{R_- + R_+ - 2m} \right) (dz^2 + d\rho^2) \\
 & + \rho^2 \left(\frac{R_- + R_+ + 2m}{R_- + R_+ - 2m} \right) d\varphi^2
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Comparando com a métrica de Weyl no vácuo podemos fazer as seguintes identificações

$$e^{2\psi} = \frac{R_- + R_+ - 2m}{R_- + R_+ + 2m} \tag{4.17}$$

e

$$e^{2\nu} = \frac{(R_- + R_+)^2 - 4m^2}{4R_- R_+}. \tag{4.18}$$

Isolando ψ na equação (4.17) encontramos

$$\psi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{R_- + R_+ - 2m}{R_- + R_+ + 2m} \right)$$

que é a equação para o potencial newtoniano para uma barra localizada em $\rho = 0$ e entre $z = -m$ e $z = m$ com uma densidade linear de massa $\lambda = 1/2$ e, portanto, com uma massa m . Assim, vemos que a solução da

métrica de Weyl para um campo gravitacional esfericamente simétrico e assintoticamente plano, na região fora do horizonte de eventos $r > 2m$, que agora ocorre em $\rho = 0$, corresponde ao potencial newtoniano de uma barra de comprimento $2m$ e densidade $1/2$. Este é um bom exemplo de que uma mesma “equação” representa coisas diferentes no espaço plano e no espaço curvo.

Nesta seção apresentamos as equações de campo para a métrica de Weyl no vácuo. Também mostramos que a interpretação física da solução dessas equações é pouco intuitiva, a métrica de Schwarzschild (4.14) quando expressa nas coordenadas de Weyl se transforma no que “deveria ser” a solução para uma barra nessas coordenadas.

5 SOLUÇÕES PARA DISCOS

As soluções que chamamos de internas (dentro de uma dada distribuição de matéria) e as externas (no vácuo) para a métrica de Weyl que representam discos são importantes porque podem servir para modelar diversos sistemas físicos como, por exemplo, discos de acreção e galáxias, e em especial as galáxias espirais. Algumas formas de encontrar soluções para discos utilizando a métrica de Weyl são as seguintes:

- usar o método inverso chamado “desloque, corte e reflita”, que se baseia no método das imagens do eletromagnetismo, para uma explicação de como o método funciona e algumas soluções que foram obtidas utilizando este método consultar [31],
- usar o método direto, que equivale a fornecer um tensor de energia-momento para o disco e resolver diretamente as equações de campo (3.17).

Neste capítulo vamos procurar por soluções da métrica de Weyl (4.3)¹ para discos que podem ser representados pelo tensor de energia-momento de fluido perfeito (2.64) utilizando o método direto, ou seja, tentando resolver diretamente as equações (3.17), que neste caso vão ser as seguintes :

$$\begin{aligned}
 G_{tt} \rightarrow & \frac{c^2 \alpha^{(0,1)}(r, z)^2 \gamma(r, z)^2}{\alpha(r, z)^4} + \frac{c^2 \alpha^{(1,0)}(r, z)^2 \gamma(r, z)^2}{\alpha(r, z)^4} \\
 & - \frac{c^2 \alpha^{(0,2)}(r, z) \gamma(r, z)^2}{\alpha(r, z)^3} - \frac{c^2 \alpha^{(2,0)}(r, z) \gamma(r, z)^2}{\alpha(r, z)^3} \\
 & - \frac{c^2 \beta^{(0,2)}(r, z) \gamma(r, z)^2}{\alpha(r, z)^2 \beta(r, z)} - \frac{c^2 \beta^{(2,0)}(r, z) \gamma(r, z)^2}{\alpha(r, z)^2 \beta(r, z)} \\
 & = 8\pi G \gamma(r, z)^2 \rho(r, z)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

¹Para todos os cálculos abaixo utilizamos $(x_2, x_3) = (r, z)$.

$$\begin{aligned}
G_{rr} \rightarrow & -\frac{\alpha^{(0,1)}(r,z)\beta^{(0,1)}(r,z)}{\alpha(r,z)\beta(r,z)} + \frac{\alpha^{(1,0)}(r,z)\beta^{(1,0)}(r,z)}{\alpha(r,z)\beta(r,z)} \\
& + \frac{\alpha^{(1,0)}(r,z)\gamma^{(1,0)}(r,z)}{\alpha(r,z)\gamma(r,z)} - \frac{\alpha^{(0,1)}(r,z)\gamma^{(0,1)}(r,z)}{\alpha(r,z)\gamma(r,z)} \\
& + \frac{\beta^{(0,1)}(r,z)\gamma^{(0,1)}(r,z)}{\beta(r,z)\gamma(r,z)} + \frac{\beta^{(1,0)}(r,z)\gamma^{(1,0)}(r,z)}{\beta(r,z)\gamma(r,z)} \\
& + \frac{\beta^{(0,2)}(r,z)}{\beta(r,z)} + \frac{\gamma^{(0,2)}(r,z)}{\gamma(r,z)} = \frac{8\pi Gp(r,z)\alpha(r,z)^2}{c^4}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
G_{rz} \rightarrow & \frac{\alpha^{(1,0)}(r,z)\beta^{(0,1)}(r,z)}{\alpha(r,z)\beta(r,z)} + \frac{\alpha^{(0,1)}(r,z)\beta^{(1,0)}(r,z)}{\alpha(r,z)\beta(r,z)} \\
& + \frac{\alpha^{(1,0)}(r,z)\gamma^{(0,1)}(r,z)}{\alpha(r,z)\gamma(r,z)} + \frac{\alpha^{(0,1)}(r,z)\gamma^{(1,0)}(r,z)}{\alpha(r,z)\gamma(r,z)} \\
& - \frac{\beta^{(1,1)}(r,z)}{\beta(r,z)} - \frac{\gamma^{(1,1)}(r,z)}{\gamma(r,z)} = 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
G_{zz} \rightarrow & \frac{\alpha^{(0,1)}(r,z)\beta^{(0,1)}(r,z)}{\alpha(r,z)\beta(r,z)} - \frac{\alpha^{(1,0)}(r,z)\beta^{(1,0)}(r,z)}{\alpha(r,z)\beta(r,z)} \\
& + \frac{\alpha^{(0,1)}(r,z)\gamma^{(0,1)}(r,z)}{\alpha(r,z)\gamma(r,z)} - \frac{\alpha^{(1,0)}(r,z)\gamma^{(1,0)}(r,z)}{\alpha(r,z)\gamma(r,z)} \\
& + \frac{\beta^{(0,1)}(r,z)\gamma^{(0,1)}(r,z)}{\beta(r,z)\gamma(r,z)} + \frac{\beta^{(1,0)}(r,z)\gamma^{(1,0)}(r,z)}{\beta(r,z)\gamma(r,z)} \\
& + \frac{\beta^{(2,0)}(r,z)}{\beta(r,z)} + \frac{\gamma^{(2,0)}(r,z)}{\gamma(r,z)} = \frac{8\pi Gp(r,z)\alpha(r,z)^2}{c^4}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
G_{\varphi\varphi} \rightarrow & \frac{\alpha^{(0,2)}(r,z)\beta(r,z)^2}{\alpha(r,z)^3} + \frac{\alpha^{(2,0)}(r,z)\beta(r,z)^2}{\alpha(r,z)^3} \\
& - \frac{\alpha^{(0,1)}(r,z)^2\beta(r,z)^2}{\alpha(r,z)^4} - \frac{\alpha^{(1,0)}(r,z)^2\beta(r,z)^2}{\alpha(r,z)^4} \\
& + \frac{\beta(r,z)^2\gamma^{(0,2)}(r,z)}{\alpha(r,z)^2\gamma(r,z)} + \frac{\beta(r,z)^2\gamma^{(2,0)}(r,z)}{\alpha(r,z)^2\gamma(r,z)} \\
= & \frac{8\pi Gp(r,z)\beta(r,z)^2}{c^4}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

As informações contidas nas equações acima não são suficientes para a completa determinação dos sistemas, para este fim outras informações são necessárias, também vamos precisar da equação de conservação do tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ e de uma equação de estado, que é uma equação que relaciona a pressão e a densidade de energia do fluido. Nesta dissertação vamos utilizar a equação de estado abaixo, já que é uma equação considerada em diversos trabalhos [32–35]

$$p(r, z) = \lambda c^2 \rho(r, z) \quad (5.6)$$

onde λ é uma constante. O caso $\lambda = 0$ pode ser interpretado como o poeira, $\lambda = 1/3$ como radiação ou matéria ultrarrelativística e $\lambda = 1$ como matéria rígida [32]. A equação de conservação para o caso acima fica

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \rightarrow & \quad (\lambda + 1) \left(\gamma^{(0,1)}(r, z) + \gamma^{(1,0)}(r, z) \right) \rho(r, z) \quad (5.7) \\ & + \lambda \gamma(r, z) \left(\rho^{(0,1)}(r, z) + \rho^{(1,0)}(r, z) \right) = 0. \end{aligned}$$

A solução das equações acima não é simples nem numericamente e nem analiticamente, já que trata-se de um conjunto de equações diferenciais não lineares acopladas. Ao invés de tentar resolver esse problema, vamos inicialmente considerar algumas equações de estado mais simples baseadas em fatos fenomenológicos e na literatura para assim, em uma primeira etapa aprender a tratar deste problema. Por isso, a seguir vamos encontrar as soluções para alguns casos mais simples. No primeiro caso vamos assumir que a métrica de Weyl no vácuo (4.10) também poderia ser utilizada para calcular soluções internas e que a densidade de massa é constante em toda a distribuição de matéria. Na segunda e na terceira solução vamos nos restringir ao caso em que $\lambda = 1$ e considerar que as funções da métrica só dependem da coordenada r . Na segunda solução também assumiremos a aproximação em que a densidade de massa deve ser proporcional ao termo g^{rr} da métrica.

5.1 PRESSÃO E DENSIDADE DE MASSA CONSTANTES

Nesta seção vamos considerar que a forma da métrica de Weyl no vácuo é geral o suficiente para que também possa ser usada para calcular soluções internas [36, 37] que sejam “fisicamente razoáveis”. Portanto, vamos utilizar a métrica (4.10) substituindo $\gamma(r, z) = e^{\psi(r, z)}$ e $\alpha(r, z) = e^{\nu(r, z)}$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 e^{2\psi(r,z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\nu(r,z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\nu(r,z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 e^{-2\psi(r,z)} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Considerando a métrica acima, vamos agora assumir que a fonte do campo gravitacional pode ser expressa pelo tensor de energia-momento para um fluido perfeito (2.64). Neste caso vamos obter as seguintes equações de campo(3.17):

$$\begin{aligned} G_{tt} \rightarrow & -\nu^{(0,2)}(r, z) - \nu^{(2,0)}(r, z) - \psi^{(0,1)}(r, z)^2 - \psi^{(1,0)}(r, z)^2 \quad (5.9) \\ & + \psi^{(0,2)}(r, z) + \frac{2\psi^{(1,0)}(r, z)}{r} + \psi^{(2,0)}(r, z) = \frac{8\pi G e^{2\nu(r,z)} \rho(r, z)}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{rr} \rightarrow & \frac{\nu^{(1,0)}(r, z)}{r} + \psi^{(0,1)}(r, z)^2 - \psi^{(1,0)}(r, z)^2 \quad (5.10) \\ & + \frac{\psi^{(1,0)}(r, z)}{r} = \frac{8\pi G p(r, z) e^{2\nu(r,z)}}{c^4} \end{aligned}$$

$$G_{rz} \rightarrow \frac{\nu^{(0,1)}(r, z)}{r} + \frac{\psi^{(0,1)}(r, z)}{r} - 2\psi^{(0,1)}(r, z)\psi^{(1,0)}(r, z) = 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} G_{zz} \rightarrow & -\frac{\nu^{(1,0)}(r, z)}{r} - \psi^{(0,1)}(r, z)^2 + \psi^{(1,0)}(r, z)^2 \quad (5.12) \\ & - \frac{\psi^{(1,0)}(r, z)}{r} = \frac{8\pi G p(r, z) e^{2\nu(r,z)}}{c^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{\varphi\varphi} \rightarrow & \nu^{(0,2)}(r, z) + \nu^{(2,0)}(r, z) + \psi^{(0,1)}(r, z)^2 \quad (5.13) \\ & + \psi^{(1,0)}(r, z)^2 + \psi^{(0,2)}(r, z) + \psi^{(2,0)}(r, z) = \frac{8\pi G p(r, z) e^{2\nu(r,z)}}{c^4} \end{aligned}$$

A equação de estado que vamos utilizar nesta seção será a equação (5.6), e para facilitar o problema vamos nos restringir ao caso mais simples

em que a densidade de massa é constante $\rho(r, z) = \omega$ [38]. Desta forma a conservação do tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, nos leva à

$$\psi^{(0,1)} + \psi^{(1,0)} = 0.$$

Substituindo a relação acima nas equações de campo (5.9) a (5.13) vamos obter:

$$2r\nu^{(1,0)}(r, z)^2 + \nu^{(1,0)}(r, z) + \nu^{(0,1)}(r, z) = 0, \quad (5.14)$$

$$\psi^{(0,2)}(r, z) + \frac{\psi^{(1,0)}(r, z)}{r} + \psi^{(2,0)}(r, z) = \frac{4\pi(\lambda + 1)G\omega e^{2\nu(r, z)}}{c^4}. \quad (5.15)$$

Para a primeira dessas equações foram encontradas analiticamente duas soluções dadas por:

$$\nu_1(r, z) = \frac{1}{4} [-2\sqrt{8c_1r + 1} - 2\log(1 - \sqrt{8c_1r + 1})] - c_1z + c_2 \quad (5.16)$$

$$\nu_2(r, z) = \frac{1}{4} [2\sqrt{8c_1r + 1} - 2\log(1 + \sqrt{8c_1r + 1})] - c_1z + c_2 \quad (5.17)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Portanto, a função $\psi(r, z)$ também terá duas soluções possíveis que serão apresentadas nas seções abaixo.

5.1.1 Solução para $\nu_1(r, z)$

Nesta seção vamos encontrar a solução para $\psi(r, z)$ na equação (5.15) substituindo $\nu(r, z) = \nu_1(r, z)$, com $\nu_1(r, z)$ dado pela equação (5.16). Vamos supor que o objeto em questão tenha características semelhantes às de uma galáxia, de raio r_g e espessura $2h_g$.

Para determinar a constante c_2 em (5.16), utilizamos como condição de contorno que $\nu_1(0, 0) = 0$, de modo que $g_{rr}^{(1)}(0, 0) = g_{zz}^{(1)}(0, 0) = e^{2\nu_1(0, 0)} = 1$ como na métrica de Minkowski [35, 39, 40]. Para efetuar cálculos numéricos, escolhemos que $c_1 = 1/a$, onde a é um parâmetro com dimensão de comprimento. Assim, a função para $\nu_1(r, z)$ será:

$$\nu_1(r, z) = \frac{a \left[\sqrt{\frac{8r}{a} + 1} - 1 + \log(2) \right] - a \log \left(\sqrt{\frac{8r}{a} + 1} + 1 \right) - 2z}{2a}.$$

Na Figura 3 está o gráfico para $g_{rr}^{(1)} = g_{zz}^{(1)} = e^{2\nu_1(r, z)}$ entre os

intervalos $r = \{0, r_g\}$ e $z = \{-h_g, h_g\}$, onde r_g é o raio da distribuição de massa e h_g é a espessura², o gráfico foi obtido com $a = r_g$.

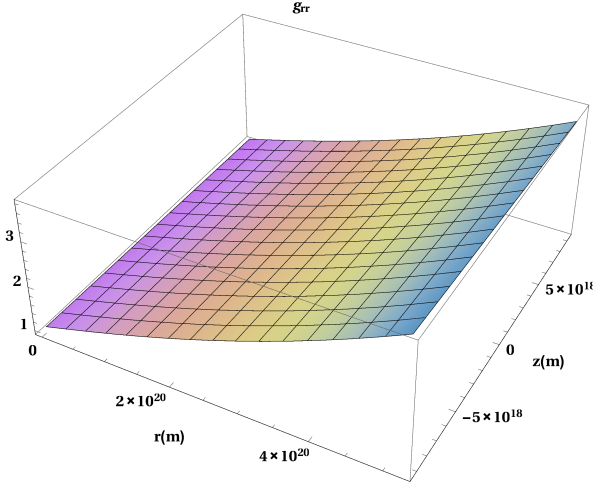


Figura 3 – Gráfico para a componente $g_{rr}^{(1)} = g_{zz}^{(1)} = e^{2\nu_1(r,z)}$ da métrica, com $\nu_1(r)$ dado pela equação (5.16).

Substituindo $\nu_1(r, z)$ na equação (5.15) vamos obter:

$$\psi_1^{(0,2)}(r, z) + \frac{\psi_1^{(1,0)}(r, z)}{r} + \psi_1^{(2,0)}(r, z) = \frac{8\pi(\lambda + 1)G\omega e^{\sqrt{\frac{8r}{a} + 1} - \frac{2z}{a} - 1}}{c^2 \left(\sqrt{\frac{8r}{a} + 1} + 1 \right)}. \quad (5.18)$$

Podemos observar que a equação diferencial acima é uma equação de Poisson, que possui a solução dada por:

$$\psi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv',$$

²Os valores para o raio r_g e a espessura $2h_g$ da distribuição de massa utilizados foram os valores aproximados para a Via Láctea, ou seja, $5,2 \times 10^{20}m$ e $1,9 \times 10^{19}m$ respectivamente.

que em coordenadas cilíndricas fica

$$\psi(r, z, \varphi) = - \int_0^{2\pi} \int_{-|z|}^{|z|} \int_0^r \frac{G\rho(r', z', \phi') r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}} dr' dz' d\phi'$$

onde a função $\rho(r', z', \phi')$ é dada por

$$\frac{2(\lambda + 1)\omega e^{\sqrt{\frac{8r}{a} + 1} - \frac{2z}{a} - 1}}{c^2 \left(\sqrt{\frac{8r}{a} + 1} + 1 \right)}.$$

Calculando a integral acima, para $\lambda = 1/3$ e

$$\omega = \begin{cases} 8,8 * 10^{-20} Kg.m^{-3} & \text{se } r \leq r_g \text{ e } |z| \leq h_g \\ 0 & \text{se } r \geq r_g \text{ ou } |z| \geq h_g \end{cases},$$

para vários pontos na região $r = \{0, 2r_g\}$ e $z = \{-2h_g, 2h_g\}$ utilizando o programa *Mathematica* obtivemos o seguinte gráfico da Figura 4 para $g_{tt}^{(1)} = e^{2\psi_1(r,z)}$.

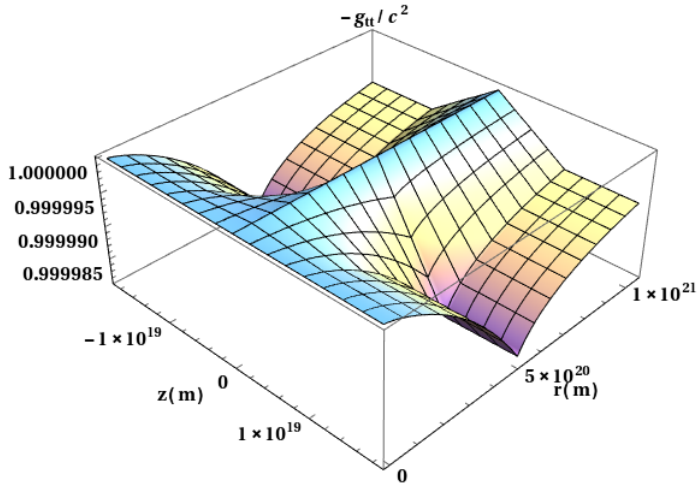


Figura 4 – Gráfico para a componente $-g_{tt}^{(1)}/c^2 = e^{2\psi_1(r,z)}$ da métrica, onde $\psi_1(r)$ é a solução da equação (5.18). A região do vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.

5.1.2 Solução para $\nu_2(r, z)$

Nesta seção vamos encontrar a solução para $\psi(r, z)$ na equação (5.15) substituindo $\nu(r, z) = \nu_2(r, z)$, com $\nu_2(r, z)$ dado pela equação (5.17).

A constante c_1 na equação para $\nu_2(r, z)$ foi determinada de modo que a assinatura da métrica (5.8) não fosse alterada. Já a constante c_2 foi escolhida como $c_2 = 0$, esta escolha foi feita porque a função $\nu_2(r, z)$ diverge na origem e c_2 é apenas uma constante aditiva, de forma que seu valor não é determinante para a forma da função. Assim, a função para $\nu_2(r, z)$ será:

$$\nu_2(r, z) = \frac{-4r_g \sqrt{1 - \frac{r}{r_g}} - 4r_g \log \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r}{r_g}} \right) + z}{8r_g}.$$

Os resultados numéricos para $g_{rr}^{(2)} = g_{zz}^{(2)} = e^{2\nu_2(r, z)}$ estão mostrados na Figura 5, onde foram tomados os intervalos $r = \{0, r_g\}$ e $z = \{-h_g, h_g\}$:

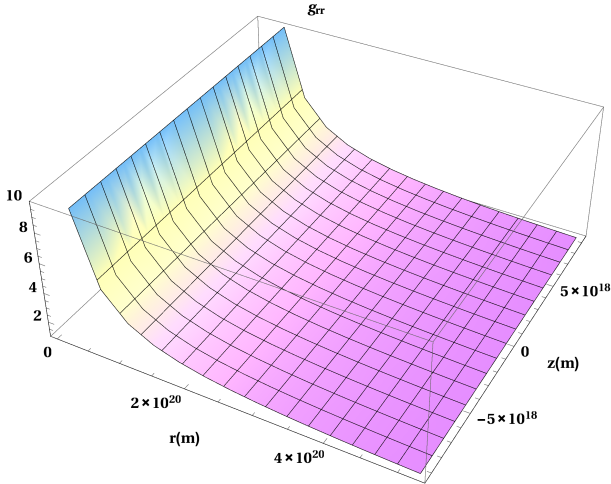


Figura 5 – Gráfico para a componente $g_{rr}^{(2)} = g_{zz}^{(2)} = e^{2\nu_2(r, z)}$ da métrica, com $\nu_2(r)$ dado pela equação (5.17).

Substituindo $\nu_2(r, z)$ na equação (5.15) vamos obter:

$$\psi_2^{(0,2)}(r, z) + \frac{\psi_2^{(1,0)}(r, z)}{r} + \psi_2^{(2,0)}(r, z) = -\frac{4\pi(\lambda + 1)G\omega e^{\frac{z}{4r_g}} - \sqrt{1 - \frac{r}{r_g}}}{c^2 \left(\sqrt{1 - \frac{r}{r_g}} - 1 \right)}. \quad (5.19)$$

Novamente, obtemos uma equação de Poisson, e realizando os mesmos procedimentos da seção anterior vamos obter os resultados para $g_{tt}^{(2)} = e^{2\psi_2(r, z)}$ que estão mostrados na Figura 6. Esses resultados, juntamente com os da seção anterior, determinam o comportamento da métrica para este primeiro caso, onde a pressão e a densidade de massa são constantes.

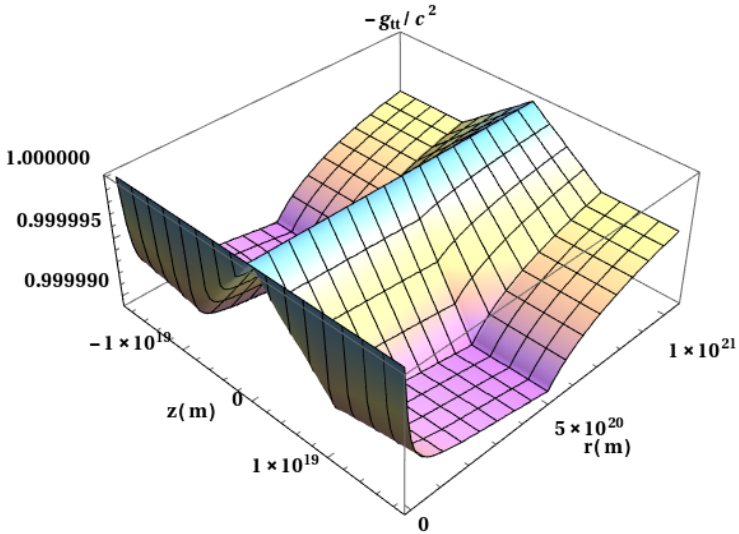


Figura 6 – Gráfico para a componente $-g_{tt}^{(2)}/c^2 = e^{2\psi_2(r, z)}$ da métrica, onde $\psi_2(r)$ é a solução da equação (5.19). A região do vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.

5.2 PRESSÃO E DENSIDADE DE MASSA PROPORCIONAIS AO TERMO (11) DA MÉTRICA

Nesta seção e na próxima, vamos tomar uma forma um pouco mais complicada para a equação de estado e considerar o caso em que as funções da métrica dependem apenas da coordenada r . Algumas soluções para a métrica de Weyl que foram calculadas para este caso podem ser encontradas em [30,33,35–38,41–44]. Aqui vamos reescrever a métrica (4.3) redefinindo as funções γ, α e β que aparecem em (4.3) de forma que o tensor métrico fique

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 e^{2\gamma(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\alpha(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 e^{2\beta(r)} \end{pmatrix}.$$

Além disso, nesta e também na próxima seção vamos assumir que a fonte do campo gravitacional é um fluido perfeito representado pelo tensor da equação (2.64), que nossa equação de estado é dada por (5.6) e vamos nos restringir ao caso em que $\lambda = 1$ [45–49], de forma que as equações (5.1) a (5.7) ficam

$$\begin{aligned} G_{tt} &\rightarrow \alpha''(r) + \beta''(r) + \beta'(r)^2 + \frac{2\beta'(r)}{r} \\ &= -\frac{8\pi G e^{2\alpha(r)} \rho(r)}{c^2} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} G_{rr} &\rightarrow \alpha'(r)\beta'(r) + \alpha'(r)\gamma'(r) + \frac{\alpha'(r)}{r} + \beta'(r)\gamma'(r) \\ &+ \frac{\gamma'(r)}{r} = \frac{8\pi G p(r) e^{2\alpha(r)}}{c^4} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} G_{zz} &\rightarrow -\alpha'(r)\beta'(r) - \alpha'(r)\gamma'(r) - \frac{\alpha'(r)}{r} + \beta''(r) \\ &+ \beta'(r)\gamma'(r) + \beta'(r)^2 + \frac{2\beta'(r)}{r} + \gamma''(r) \\ &+ \gamma'(r)^2 + \frac{\gamma'(r)}{r} = \frac{8\pi G p(r) e^{2\alpha(r)}}{c^4} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$G_{\varphi\varphi} \rightarrow \alpha''(r) + \gamma''(r) + \gamma'(r)^2 = \frac{8\pi G p(r) e^{2\alpha(r)}}{c^4} \quad (5.23)$$

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \rightarrow 2\rho(r)\gamma'(r) + \gamma(r)\rho'(r) = 0 \quad (5.24)$$

Neste ponto vamos assumir que $p(r)$ está relacionado à função $\alpha(r)$ da seguinte forma

$$\rho(r) = \rho_0 g^{rr}, \quad (5.25)$$

onde ρ_0 é a densidade de massa em $r = 0$. Mais adiante veremos que esta expressão implica em uma pressão que concorda razoavelmente com o observado em sistemas astronômicos. Fazendo isso, vamos concluir que para que a equação de conservação (5.24) seja satisfeita devemos ter $\alpha'(r) = \gamma'(r)$. Substituindo essa relação nas equações de campo vamos obter

$$\begin{aligned} \alpha''(r) + \beta''(r) + \beta'^2 + \frac{2\beta'(r)}{r} &= 0 \\ 2\alpha'(r)\beta'(r) + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'(r)}{r} &= \frac{8\pi G \rho_0}{c^2} \\ 2\alpha''(r) + \alpha'^2 &= \frac{8\pi G \rho_0}{c^2}. \end{aligned}$$

Resolvendo as duas últimas equações para $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= 2 \log \left[\cosh \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} (r - 2c^2 c_1)}{c} \right) \right] + c_2 \\ \beta(r) &= -2 \tanh^{-1} \left[\cosh \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} (r - 4c^2 c_1)}{c} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r}{c} \right) \right] \\ &\quad + c_3 - \log(r). \end{aligned}$$

Vamos utilizar como condições de contorno que $\alpha(0) = \gamma(0) = 0$ de forma que as componentes g_{tt} , g_{rr} e g_{zz} da métrica assumam, em $r = 0$, o valor que teriam na métrica de Minkowski. Também utilizamos como condição de contorno que $\beta(r_g) = -\gamma(r_g)$, onde r_g é o valor de r onde começa a região do vácuo, esta condição foi usada para que a solução interna seja contínua com a solução externa, pois, para a métrica de Weyl no vácuo $\beta(r) = -\gamma(r)$. Além disso, também impusemos que a função para a densidade $\rho(r)$ atinja seu valor máximo em $r = 0$, que é o que costuma ocorrer em galáxias. Desta forma, vamos concluir que

as funções $a(r)$, $\beta(r)$, $\gamma(r)$ e $\rho(r)$ serão

$$\gamma(r) = \alpha(r) = \log \left[\cosh^2 \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r}{c} \right) \right] \quad (5.26)$$

$$\beta(r) = \log \left[\frac{2r_g \tanh \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r}{c} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{2\sqrt{2\pi G \rho_0} r_g}{c} \right)}{r} \right] \quad (5.27)$$

$$\rho(r) = \rho_0 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r}{c} \right). \quad (5.28)$$

Se calculamos as equações de campo no vácuo (4.6) quando as funções dependem apenas de r , com $g_{tt} = e^{2\gamma e(r)} = r^2/g_{\varphi\varphi}$ e $g_{rr} = g_{zz} = e^{2\alpha e(r)}$, vamos obter:

$$\begin{aligned} r\gamma e''(r) + \gamma e'(r) &= 0 \\ \alpha e''(r) &= \frac{\alpha e'(r)}{r} - 2\gamma e'(r)^2 + \frac{2\gamma e'(r)}{r} \\ \alpha e''(r) + \frac{\alpha e'(r)}{r} &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo as duas últimas equações para $\alpha e(r)$ e $\gamma e(r)$ e utilizando como condições de contorno que $\alpha e(r_g) = \alpha(r_g)$, $\gamma e(r_g) = \gamma(r_g)$ e $\alpha e'(r_g) = \alpha'(r_g)$ de forma a impor a continuidade entre as soluções interna e externa, vamos encontrar:

$$\begin{aligned} \alpha e(r) &= \frac{2\sqrt{2\pi G \rho_0} r_g}{c} \log \left(\frac{r}{r_g} \right) \tanh \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r_g}{c} \right) \\ &+ \log \left[\cosh^2 \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r_g}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma e(r) &= \log \left[\cosh^2 \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r_g}{c} \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \log \left(\frac{r}{r_g} \right) \left[\sqrt{8 \frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r_g}{c} \tanh \left(\frac{\sqrt{2\pi G \rho_0} r_g}{c} \right) + 1} - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

Desse modo, obtivemos todas as quantidades de interesse e as Figuras

7 a 11 mostram os gráficos para a pressão $p(r)$, a densidade de massa $\rho(r)$ e as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$:

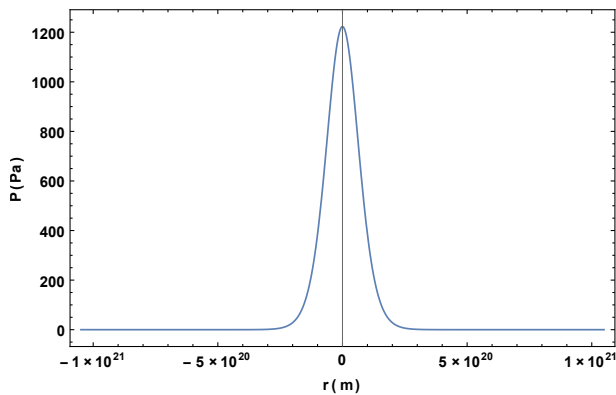


Figura 7 – Gráfico para a pressão $p(r) = c^2 \rho(r)$, onde $\rho(r)$ é dada pela equação (5.28).

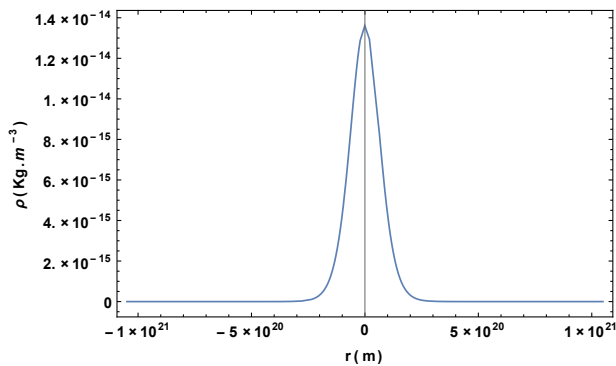


Figura 8 – Gráfico para a densidade de massa $\rho(r)$ dada pela equação (5.28).

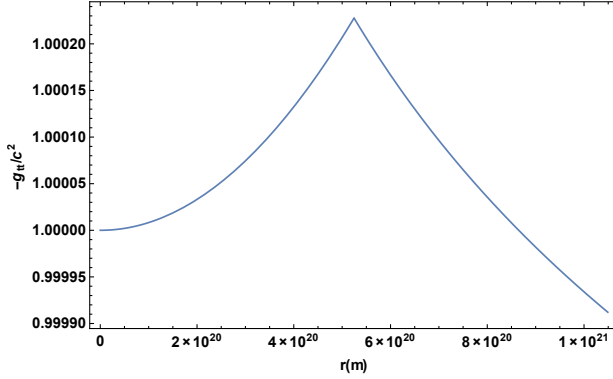


Figura 9 – Gráfico para a componente $-g_{tt}/c^2 = e^{2\gamma(r)}$ para a parte interna e $-g_{tt}/c^2 = e^{2\gamma e(r)}$ para a parte externa da métrica, onde $\gamma(r)$ é dado pela equação (5.26) e $\gamma e(r)$ é dado pela equação (5.30). A região de vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.

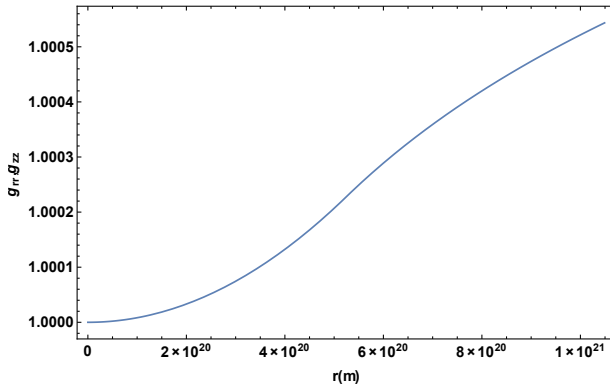


Figura 10 – Gráfico para a componente $g_{rr} = g_{zz} = e^{2\alpha(r)}$ para a parte interna e $g_{rr} = g_{zz} = e^{2\alpha e(r)}$ para a parte externa da métrica, onde $\alpha(r)$ é dado pela equação (5.26) e $\alpha e(r)$ é dado pela equação (5.29). A região de vácuo começa em $r = 5 \times 10^{20} m$.

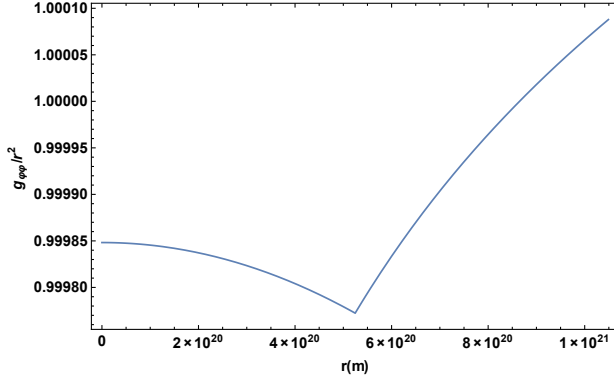


Figura 11 – Gráfico para a componente $g_{\varphi\varphi}/r^2 = e^{2\beta(r)}$ para a parte interna e $g_{\varphi\varphi}/r^2 = e^{-2\gamma e(r)}$ para a parte externa da métrica, onde $\beta(r)$ é dado pela equação (5.27) e $\gamma e(r)$ é dado pela equação (5.30). A região de vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.

Para obter os resultados dos gráficos das Figuras 7 a 11, utilizamos para r_g o mesmo valor utilizado na seção (5.1.1), para os gráficos para a pressão e para a densidade de massa, Figuras 7 e 8, utilizamos $\rho_0 = 2 \times 10^{-14} \text{ Kg.m}^{-3}$ e para os gráficos para as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, Figuras 9 a 11, utilizamos $\rho_0 = 8,8 \times 10^{-20} \text{ Kg.m}^{-3}$.

5.2.1 Comparação com resultados da literatura

Nesta seção vamos comparar nosso gráfico para a densidade de massa, Figura 8, com dois modelos da literatura para a distribuição de massa em uma galáxia. De acordo com o primeiro modelo [50–52], a densidade de massa em uma galáxia que tem aproximadamente a forma de um disco, decai exponencialmente em função do raio, de forma que:

$$\rho^{\text{exp}}(r) = \rho_0^{\text{exp}} e^{-r/r_d} \quad (5.31)$$

onde ρ_0^{exp} é a densidade de massa no centro da galáxia e r_d é o comprimento de escala do disco. Para a Via Láctea estima-se que r_d tenha um valor entre $6,2 \times 10^{19}$ e $9,3 \times 10^{19} \text{ m}$, vamos utilizar o valor mais baixo, portanto, $r_d = 6,2 \times 10^{19} \text{ m}$, além disso, para obter o gráfico da Figura 12 assumimos que $\rho_0^{\text{exp}} = \rho_0 = 2 \times 10^{-14} \text{ Kg.m}^{-3}$.

O segundo modelo que vamos considerar é o modelo para a Via

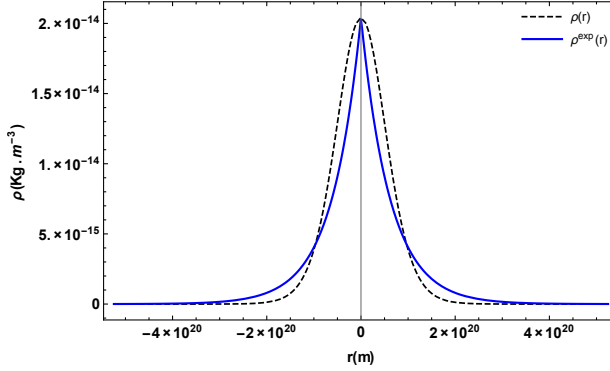


Figura 12 – Gráfico para $\rho(r)$ e $\rho^{\text{exp}}(r)$, onde $\rho(r)$ é calculado pela equação (5.28) e $\rho^{\text{exp}}(r)$ é um resultado da literatura [50–52], dado pela equação (5.31).

Láctea que pode ser encontrado nos livros [52, 53] e que se baseia nos artigos [54–57]. Este modelo divide a galáxia em quatro componentes: o bojo, o disco estelar, a matéria interestelar e o halo de matéria escura, que são representados pelas seguintes equações, respectivamente:

$$\rho_b(r, z) = \rho_{b_0} \left(\frac{m}{a_b} \right)^{\alpha_b} e^{-m^2/r_b^2}, \quad (5.32)$$

$$\text{onde } m = \sqrt{r^2 + z^2/q_b^2},$$

$$\rho_d(r, z) = \Sigma_d r^{r/r_d} \left(\frac{\alpha_0}{2z_0} e^{-|z|/z_0} + \frac{\alpha_1}{2z_1} e^{-|z|/z_1} \right), \quad (5.33)$$

$$\rho_g(r, z) = \frac{\Sigma_g}{2z_g} \exp \left(-\frac{r}{r_g} - \frac{r_m}{r} - \frac{|z|}{z_g} \right), \quad (5.34)$$

$$\rho_h(r, z) = \rho_{h_0} \left(\frac{m}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \left(1 + \frac{m}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h}, \quad (5.35)$$

$$\text{onde } m = \sqrt{r^2 + z^2/q_h^2}.$$

Todos os parâmetros que aparecem nas equações acima podem ser encontrados nas Tabelas 1 a 4.

Tabela 1 – Parâmetros para $\rho_b(r, z)$

α_b	q_b	$r_b (Kpc)$	$a_b (Kpc)$	$\rho_{b_0} (M_\odot pc^{-3})$
1.8	0.6	1.9	1	0.427

Tabela 2 – Parâmetros para $\rho_d(r, z)$

$\alpha_0 = \alpha_1$	$z_0 (Kpc)$	$z_1 (Kpc)$	$r_d (Kpc)$	$\Sigma_d (M_\odot pc^{-2})$
0.5	0.3	1	2	1429

Tabela 3 – Parâmetros para $\rho_g(r, z)$

$r_m (Kpc)$	$z_g (pc)$	$r_g (Kpc)$	$\Sigma_g (M_\odot pc^{-2})$
4	80	$2r_d$	476

Tabela 4 – Parâmetros para $\rho_h(r, z)$

α_h	β_h	q_h	$a_h (Kpc)$	$\rho_{h_0} (M_\odot pc^{-3})$
-2	2.96	0.8	3.83	0.711

Nas Tabelas 1 a 4, $1pc = 3,0857 * 10^{16}m$ e $1M_\odot = 1,99886 * 10^{30}Kg$. Considerando que a densidade de massa total para a Via Láctea seja dada pela soma das densidades de massa de seus componentes, $\rho_{MW}(r, z) = \rho_b(r, z) + \rho_d(r, z) + \rho_g(r, z) + \rho_h(r, z)$, vamos comparar nossa função $\rho(r)$, dessa vez colocando $\rho_0 = 8,8 * 10^{-13}Kg.m^{-3}$, com a densidade de massa total para a galáxia no plano do disco, ou seja, $\rho_{MW}(r, 0)$.

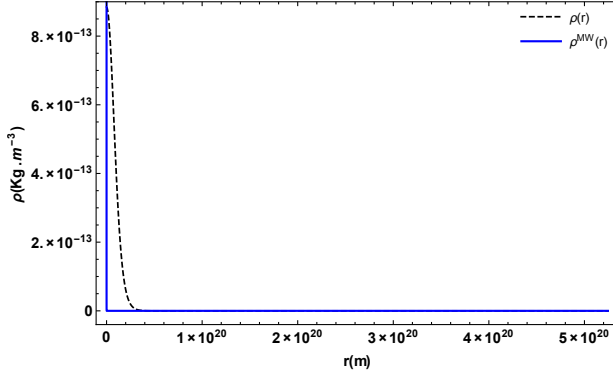


Figura 13 – Gráfico para $\rho(r)$ e $\rho^{MW}(r)$, onde $\rho(r)$ é calculado pela equação (5.28) e $\rho^{MW}(r)$ é um resultado da literatura [52, 53], dado pela soma das funções (5.32) a (5.35).

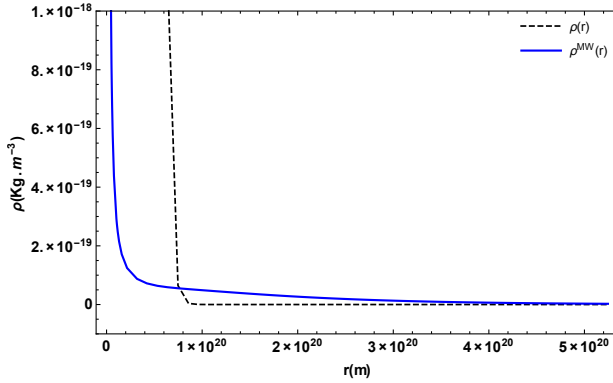


Figura 14 – Mesmo gráfico da Figura 12 mas, para uma escala diferente, para melhor comparação das curvas.

Nesta seção comparamos a função para a densidade de massa que encontramos na seção (5.2), com dois casos conhecidos na literatura. No primeiro caso, comparamos nossa solução com um modelo mais simples, que considera que, de um modo geral, a densidade de massa de galáxias decai exponencialmente com o raio. Analisando a Figura 12, vemos que as curvas para $\rho(r)$ e $\rho^{\text{exp}}(r)$ são bastante parecidas. No segundo caso, fizemos a comparação com um modelo mais

completo, que divide a galáxia em bojo, disco, halo de matéria escura e matéria interestelar. Neste caso, podemos observar pelas Figuras 13 e 14 que as curvas para $\rho(r)$ e $\rho^{MW}(r)$ apresentam desvios que podem ser diminuídos com a escolha de equações de estado mais gerais.

5.3 PRESSÃO E DENSIDADE DE MASSA COM DEPENDÊNCIA RADIAL

Nesta seção vamos utilizar as mesmas simplificações da seção anterior com a exceção de que não vamos definir como $\rho(r)$ deve se comportar, ou seja, procuramos uma solução mais geral. Neste caso se resolvemos a equação (5.24) para $\rho(r)$ em função de $\gamma(r)$ vamos encontrar

$$\rho(r) = P_1 e^{-2\gamma(r)} \quad (5.36)$$

onde P_1 é uma constante de integração. Substituindo a relação acima nas equações (5.20) a (5.23), e fazendo os seguintes repasses $\alpha(r) \rightarrow a(r)$, $\beta(r) \rightarrow b(r)$ e $\gamma(r) \rightarrow g(r)$ para que não haja confusão com a solução da seção anterior, vamos encontrar

$$G_{tt} \rightarrow a''(r) + b''(r) + b'(r)^2 + \frac{2b'(r)}{r} = -\frac{8\pi G P_1 e^{2a(r)-2g(r)}}{c^2}$$

$$G_{rr} \rightarrow a'(r)b'(r) + a'(r)g'(r) + \frac{a'(r)}{r} + b'(r)g'(r) + \frac{g'(r)}{r} = \frac{8\pi G P_1 e^{2a(r)-2g(r)}}{c^2}$$

$$\begin{aligned} G_{zz} \rightarrow & -a'(r)b'(r) - a'(r)g'(r) - \frac{a'(r)}{r} + b''(r) + b'(r)g'(r) + b'(r)^2 \\ & + \frac{2b'(r)}{r} + g''(r) + g'(r)^2 + \frac{g'(r)}{r} = \frac{8\pi G P_1 e^{2a(r)-2g(r)}}{c^2} \end{aligned}$$

$$G_{\varphi\varphi} \rightarrow a''(r) + g''(r) + g'(r)^2 = \frac{8\pi G P_1 e^{2a(r)-2g(r)}}{c^2}.$$

Manipulando as equações acima vamos obter:

$$2b''(r) + 2b'(r)g'(r) + 2b'(r)^2 + \frac{4b'(r)}{r} + \frac{2g'(r)}{r} = 0$$

$$2a''(r) + 2a'(r)b'(r) + 2a'(r)g'(r) + \frac{2a'(r)}{r} = 0.$$

Resolvendo as equações acima para $b(r)$ e $g(r)$ em função de $a(r)$, obtemos

$$b(r) = c_3 a(r) - \log \left(\frac{r}{c_2} \right) \quad (5.37)$$

$$g(r) = -c_3 a(r) - \log (c_1 a'(r)), \quad (5.38)$$

onde c_1 , c_2 e c_3 são constantes. Se substituirmos as funções acima nas equações de campo, concluiremos que precisamos resolver a seguinte equação para $a(r)$:

$$(c_3 + 1) a''(r) + a'(r)^2 \left[\frac{8\pi c_1^2 G P_1}{c^2} e^{2(c_3+1)a(r)} + c_3^2 \right] = 0.$$

Se repassamos $a(r) = \frac{1}{2c_3+2} \log \left(\frac{c^2 q(r)}{8\pi c_1^2 G P_1} \right)$, a equação acima fica:

$$2(c_3 + 1)^2 q(r) q''(r) - [c_3(c_3 + 4) - q(r) + 2] q'^2 = 0.$$

Esta equação diferencial possui a seguinte solução

$$c_4 \Gamma \left[\frac{c_3^2}{2(c_3 + 1)^2}, -\frac{q(r)}{2(c_3 + 1)^2} \right] = c_5 + r,$$

para determinar $q(r)$ devemos calcular a função inversa na equação acima, de forma que

$$q(r) = \Gamma^{(-1)} \left[\frac{c_3^2}{2(c_3 + 1)^2}, -\frac{c_5 + r}{2(c_3 + 1)^2 c_4} \right].$$

Portanto,

$$a(r) = \frac{1}{2c_3 + 2} \log \left(\frac{c^2}{8\pi c_1^2 G P_1} \Gamma^{(-1)} \left[\frac{c_3^2}{2(c_3 + 1)^2}, -\frac{c_5 + r}{2(c_3 + 1)^2 c_4} \right] \right). \quad (5.39)$$

A função gama incompleta pode possuir valores reais e imaginários, no nosso caso queremos que as funções encontradas sejam reais, por isso, a constante c_3 foi definida de forma que as funções da métrica não possuíssem uma parte imaginária, isso ocorre quando o termo $\frac{c_3^2}{2(c_3+1)^2} = 2$ o que nos leva a dois valores para c_3 , -2 e $-2/3$, para plotar os gráficos abaixo escolhemos $c_3 = -2$. Utilizando as condições de contorno $\rho(0) = \rho_0$, $\gamma(0) = 1$, $\alpha(0) = 1$ e $\gamma(r_g) = r_g/\beta(r_g)$ foi possível calcular o valor das constantes P_1 , c_1 , c_2 e c_5 . Assim nossas funções ficaram com apenas um parâmetro, a constante c_4 . Nos gráficos

das Figuras 15 a 18 $c_4 = -13,1r_g$ e $\rho_0 = 8,8 * 10^{-20} Kg.m^{-3}$. Para a encontrar a solução externa resolvemos as equações (4.12) e (4.13) no caso em que as funções ψ e ν dependem apenas de r , e definimos as constantes da solução de modo a “emendar” a parte interna e a externa da solução. Dessa forma, obtivemos os gráficos para as componentes da métrica e para a densidade de massa estão nas Figuras 15 a 18.

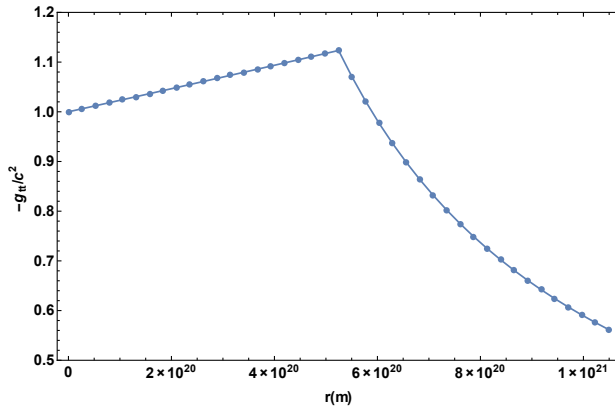


Figura 15 – Gráfico para $-g_{tt}/c^2 = e^{2g(r)}$, onde $g(r)$ é dado pela equação (5.38). A região do vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.

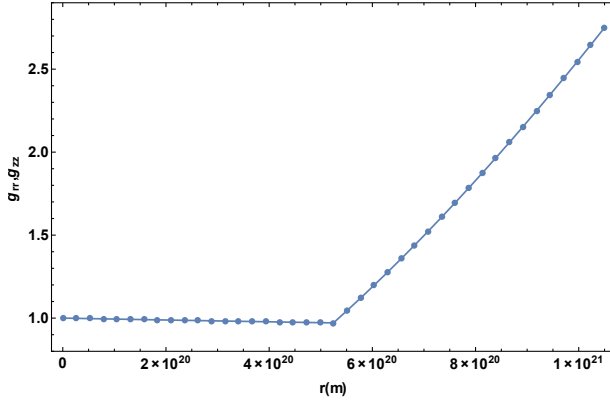


Figura 16 – Gráfico para $g_{rr} = g_{zz} = e^{2a(r)}$, onde $a(r)$ é dado pela equação (5.39). A região do vácuo começa onde há uma descontinuidade no gráfico.

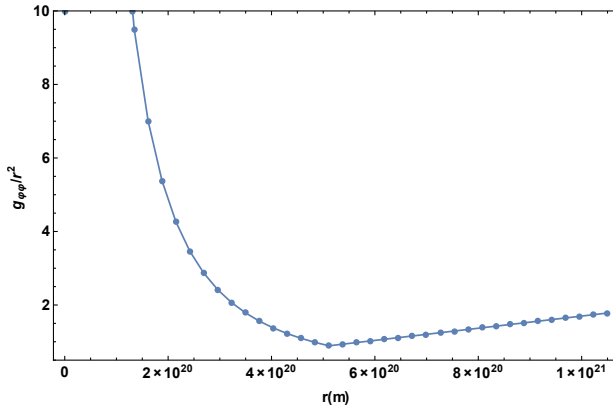


Figura 17 – Gráfico para $g_{\phi\phi}/r^2 = e^{2b(r)}$, onde $b(r)$ é dado pela equação (5.37). A região de vácuo começa em $r = 5 \times 10^{20} m$.

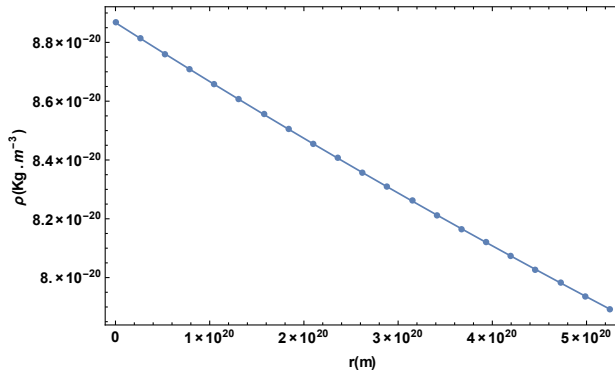


Figura 18 – Gráfico para a densidade de massa $\rho(r)$, dada pela equação (5.36).

Neste capítulo procuramos calcular soluções internas e externas para a métrica de Weyl (4.3) considerando que a fonte do campo gravitacional é dada pelo tensor de energia-momento para um fluido perfeito (2.64). Devido à complexidade das equações para o caso mais geral, dado pelas equações (5.1) a (5.7), impusemos algumas restrições de modo a obter soluções mais simples. Desta forma, obtivemos três soluções particulares que podem ser encontradas nas seções (5.1) a (5.3). Comparando as Figuras 4, 6, 9 e 15 para o termo $-g_{tt}/c^2$, podemos observar que todas as soluções obtidas partem do valor $-g_{tt}/c^2 = 1$ na origem, que é o valor que esse termo possui na métrica de Minkowski, e decrescem na parte interna da solução, e voltam a crescer na parte externa. É possível notar nas Figuras 9 e 15 que o comportamento assintótico dos gráficos não é o que se espera de uma situação fisicamente realista, as curvas tendem a zero quando r tende a infinito, quando o que se esperaria é que tendessem para $-g_{tt}/c^2 = 1$, ou seja, para a métrica de Minkowski. Isso se deve a nossa escolha de fazer as funções, em especial a densidade de massa, dependerem somente da coordenada r , o que não ocorre em uma situação realista onde o valor da densidade de massa e do campo dependem também da coordenada z . Também podemos observar que o termo g_{rr} nas Figuras 3, 10 e 16 possui comportamento semelhante, nos três casos o gráfico parte de $g_{rr} = 1$ em $r = 0$ e possui comportamento crescente na parte externa da solução. Por fim, observamos que nas duas últimas soluções a densidade de massa $\rho(r)$ possui seu valor máximo na origem, da mesma forma que costuma ocorrer em galáxias.

De posse dos resultados obtidos nas seções (5.1) a (5.3), em um trabalho futuro podemos aplicá-los no cálculo das velocidades de rotação dentro de uma galáxia, supondo movimento circular como uma primeira aproximação. Através da equação [10]

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{-g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}} \left| \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} \right|,$$

podemos encontrar as curvas de rotação para o caso relativístico e comparar com as curvas para o caso newtoniano, que pode ser encontrado simplesmente igualando a força gravitacional a uma força centrípeta:

$$\begin{aligned} m \frac{v_c(r)^2}{r} &= m \frac{d\phi}{dr} \\ v_c(r) &= \sqrt{r \frac{d\phi}{dr}}. \end{aligned}$$

De acordo com a física newtoniana a velocidade tangencial deveria crescer com o aumento da distância radial r ao centro da galáxia até um certo ponto e depois decrescer mas, o que é observado é que a velocidade cresce com a distância radial e depois permanece aproximadamente constante. Este problema nos leva a concluir que existe uma fonte de campo gravitacional que não estamos vendo e foi o que deu origem à suposição de existência de matéria escura [58–63]. Este é um objetivo importante a ser considerado em trabalhos futuros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

No decorrer desta dissertação revisamos alguns conceitos físicos e matemáticos importantes para o entendimento da relatividade geral. Em especial, nos concentramos na métrica de Weyl e na obtenção de soluções para as equações de campo de Einstein para discos de fluido perfeito através do método direto.

No segundo capítulo fizemos uma revisão de alguns aspectos matemáticos importantes para encontrar e compreender as equações da relatividade geral. Começamos apresentando algumas características dos espaços curvos, e a seguir mostramos como realizar transformações de coordenadas gerais e como encontrarmos uma derivada que possui caráter tensorial, a derivada covariante. Durante a obtenção da derivada covariante também obtivemos os símbolos de Christoffel e, em seguida, mostramos como os símbolos de Christoffel se relacionam com o tensor métrico. Por último, encontramos as equações para a geodésica, o tensor de energia-momento de um fluido perfeito e o tensor de Riemann.

No terceiro capítulo fizemos uma breve revisão de relatividade geral, apresentamos os princípios da equivalência e da covariância geral, encontramos o limite newtoniano e, nos baseando em [18], encontramos as equações de campo de Einstein.

No quarto capítulo obtivemos a forma geral da métrica para um espaço-tempo estático com simetria axial, a métrica de Weyl, para a parte interna de uma distribuição de massa e para o vácuo. A seguir, mostramos que a solução de Schwarzschild no vácuo é um exemplo de solução da métrica de Weyl no vácuo e que a interpretação das soluções nas coordenadas de Weyl são pouco intuitivas.

Por fim, no quinto capítulo, nos concentramos em tentar resolver diretamente as equações de campo de Einstein (3.17) quando a métrica do espaço-tempo é a métrica de Weyl e a fonte do campo gravitacional pode ser representada pelo tensor de energia momento para um fluido perfeito. Nesta dissertação, obtivemos três soluções particulares, aumentando gradativamente a complexidade dos sistemas. A primeira solução foi obtida assumindo que a métrica de Weyl no vácuo (4.10) é suficientemente geral para que também possa ser usada para obtenção de soluções internas, além disso, consideramos uma densidade de massa constante em toda a distribuição de matéria. Na segunda solução nos restringimos ao caso em que as funções da métrica dependem apenas

da coordenada r , e assumimos que a densidade de massa deveria ser proporcional a componente g^{rr} da métrica. Para verificar a validade de nossa escolha para a forma da densidade de massa, comparamos nosso resultado com dois modelos de densidade de massa para galáxias da literatura e concluímos que nosso resultado é bastante parecido com um dos modelos mas, não muito parecido com o outro. Para obter a terceira solução utilizamos as mesmas restrições da segunda solução mas, desta vez, encontrando a forma para a densidade de massa através das equações.

Através de nossos estudos encontramos três soluções para métrica de Weyl para alguns casos simplificados. Apesar das restrições que impusemos para obtenção dos resultados, esses contêm as principais características de uma solução fisicamente aceitável. Em uma próxima etapa, pretendemos encontrar soluções cada vez mais realistas para a representação de uma galáxia, ou seja, queremos resolver as equações (5.1) a (5.7), impondo cada vez menos simplificações. Também pretendemos comparar nossas soluções com o caso newtoniano e incluir efeitos de matéria escura. Também há a possibilidade é considerar diferentes métricas, em especial a métrica para um espaço-tempo estacionário com simetria axial, e equações de estado mais complexas. Além disso, pretendemos analisar melhor as características das soluções encontradas, estudando a estabilidade das soluções, procurando por singularidades, calculando suas geodésicas e curvas de rotação e outros efeitos físicos que possam ser estudados.

7 DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

REFERÊNCIAS

- 1 Einstein, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, WILEY-VCH Verlag, v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916.
- 2 Engel, A.; Schucking, E. L. *The Collected Papers of Albert Einstein: Writings, 1914-1917 [English Translation of Selected Texts]. The Berlin years*. [S.l.]: Princeton University Press, 1997.
- 3 Stephani, H. et al. *Exact solutions of Einstein's field equations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- 4 Griffiths, J. B.; Podolský, J. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- 5 Schwarzschild, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1916, Seite 189-196, v. 1, p. 189–196, 1916.
- 6 Schwarzschild, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *arXiv preprint physics/9905030*, 1999. Translation and foreword by S.Antoci and A.Loinger.
- 7 Cooperstock, F. I.; Tieu, S. General relativity resolves galactic rotation without exotic dark matter. *arXiv preprint astro-ph/0507619*, 2005.
- 8 Capistrano, A. J. S. *A matéria escura como efeito não-linear da gravitação*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2006.
- 9 Balasin, H.; Grumiller, D. Non-newtonian behavior in weak field general relativity for extended rotating sources. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 17, n. 03n04, p. 475–488, 2008.
- 10 Vieira, R. S. S. *Geometria de Weyl e matéria escura*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2010.

- 11 Almeida, A. O. F. *Efeitos não-lineares de Relatividade Geral e matéria escura em galáxias*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2015.
- 12 Vogt, D.; Letelier, P. S. Presence of exotic matter in the cooperstock and tieu galaxy model. *ArXiv Astrophysics e-prints*, 2005.
- 13 Korzynski, M. Singular disk of matter in the cooperstock-tieu galaxy model. *ArXiv Astrophysics e-prints*, 2005.
- 14 Fuchs, B.; Phleps, S. Comment on "general relativity resolves galactic rotation without exotic dark matter" by fi cooperstock and s. tieu. *New Astronomy*, Elsevier, v. 11, n. 8, p. 608–610, 2006.
- 15 Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. *The Classical Theory of Fields*. 3. ed. [S.l.]: Pergamon Press, 1971. (Course of Theoretical Physics, v. 2).
- 16 Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. (Gravitation, pt. 3).
- 17 Stephani, H. *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- 18 Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles Applications of the General Theory of Relativity*. [S.l.]: Wiley India Pvt. Limited, 2008.
- 19 Schutz, B. *A First Course in General Relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- 20 Weyl, H. Zur gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, WILEY-VCH Verlag, v. 359, n. 18, p. 117–145, 1917.
- 21 Weyl, H. Republication of: 3. on the theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 44, n. 3, p. 779–810, 2012.
- 22 Levi-Civita, T. ds2 einsteiniani in campi newtoniani. *Rend. Accad. Lincei*, v. 27, 1918.
- 23 Letelier, P. S. Soluções exatas das equações de einstein com simetria axial. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 1, p. 121–136, 2005.
- 24 Synge, J. L. *Relativity: The General Theory*. [S.l.]: North-Holland, 1966. (Series in physics).

- 25 Chandrasekhar, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. [S.l.]: Clarendon Press, 1998. (Oxford classic texts in the physical sciences).
- 26 Butkov, E. *Mathematical Physics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1973. (Addison-Wesley world student series).
- 27 Churchill, R.; Brown, J. *Complex Variables and Applications*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2013. (Brown and Churchill).
- 28 Gautreau, R.; Hoffman, R. B. Exact solutions of the einstein vacuum field equations in weyl coordinates. *Il Nuovo Cimento B Series 10*, Springer, v. 61, n. 2, p. 411–424, 1969.
- 29 Chazy, J. Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité. *Bulletin de la Societe mathematique de France*, Société mathématique de France, v. 52, p. 17–38, 1924.
- 30 Curzon, H. E. J. Cylindrical solutions of einstein's gravitation equations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 477–480, 1925.
- 31 Vogt, D. *Modelos de discos e outras estruturas auto-gravitantes em Relatividade Geral*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- 32 Liang, E. P. T. Velocity-dominated singularities in irrotational hydrodynamic cosmological models. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 13, n. 3, p. 386–393, 1972.
- 33 Kramer, D. Cylindrically symmetric static perfect fluids. *Classical and quantum gravity*, Institute of Physics, v. 5, n. 2, p. 393–398, 1988.
- 34 Davidson, W. A one-parameter family of cylindrically symmetric perfect fluid cosmologies. *General relativity and gravitation*, Springer, v. 24, n. 2, p. 179–185, 1992.
- 35 Haggag, S. Perfect-fluid sources for the levi-civita metric. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 13, n. 12, p. 3221, 1996.
- 36 Marder, L. Gravitational waves in general relativity. i. cylindrical waves. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 244, n. 1239, p. 524–537, 1958.

- 37 Krori, K. D.; Paul, B. B. Interior solution of a tangentially stressed cylinder in general relativity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 10, n. 1, p. 25, 1977.
- 38 Trendafilova, C. S.; Fulling, S. A. Static solutions of einstein's equations with cylindrical symmetry. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 32, n. 6, p. 1663, 2011.
- 39 Bičák, J. et al. Static fluid cylinders and their fields: global solutions. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 6, p. 1583, 2004.
- 40 Ali, R. M. Perfect-fluid sources for the levi-civita metric. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 310, n. 3-4, p. 201–204, 2007.
- 41 Evans, A. B. Static fluid cylinders in general relativity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 10, n. 8, p. 1303, 1977.
- 42 Bonnor, W. B. Solution of einstein's equations for a line-mass of perfect fluid. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 12, n. 6, p. 847, 1979.
- 43 Haggag, S. A static axisymmetric anisotropic fluid solution in general relativity. *Astrophysics and Space Science*, Springer, v. 173, n. 1, p. 47–51, 1990.
- 44 Ali, R. M. Perfect-fluid sources for the levi-civita metric ii. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 48, n. 5, p. 1454–1458, 2009.
- 45 Letelier, P. S.; Tabensky, R. R. Cylindrical self-gravitating fluids with pressure equal to energy density. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, Springer, v. 28, n. 2, p. 407–414, 1975.
- 46 Ray, D. Self-gravitating fluids with cylindrical symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 17, n. 7, p. 1171–1172, 1976.
- 47 Singh, T.; Yadav, R. B. S. Cylindrically symmetric self-gravitating fluids with pressure equal to energy density. *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Springer, v. 45, n. 2, p. 107–112, 1978.

- 48 Letelier, P. S. Self-gravitating fluids with cylindrical symmetry. ii. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 20, n. 10, p. 2078–2080, 1979.
- 49 Chakravarti, S. P.; De, U. K. Homogeneous self-gravitating perfect fluid. *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Springer, v. 50, n. 3, p. 233–236, 1981.
- 50 Freeman, K. C. On the Disks of Spiral and so Galaxies. *The Astrophysical Journal*, v. 160, p. 811, jun. 1970.
- 51 Cuddeford, P. On the potentials of galactic discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 262, n. 4, p. 1076–1086, 1993.
- 52 Binney, J.; Tremaine, S. *Galactic Dynamics*. 2. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2011. (Princeton Series in Astrophysics).
- 53 Binney, J.; Merrifield, M. *Galactic Astronomy*. [S.l.]: Princeton University Press, 1998. (Princeton paperbacks).
- 54 Gilmore, G.; Reid, N. New light on faint stars–iii. galactic structure towards the south pole and the galactic thick disc. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 202, n. 4, p. 1025–1047, 1983.
- 55 Van Albada, T. S. et al. Distribution of dark matter in the spiral galaxy ngc 3198. *The Astrophysical Journal*, v. 295, p. 305–313, 1985.
- 56 Dehnen, W.; Binney, J. Mass models of the milky way. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 294, n. 3, p. 429–438, 1998.
- 57 Sellwood, J. A. Most Real Bars are Not Made by the Bar Instability. In: Combes, F.; Mamon, G. A.; Charmandaris, V. (Ed.). *Dynamics of Galaxies: from the Early Universe to the Present*. [S.l.: s.n.], 2000. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 197), p. 3.
- 58 Zwicky, F. Some novel features of the whirlpool nebula as revealed by composite analytical photography. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, JSTOR, p. 232–236, 1955.
- 59 Bosma, A. The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types. 1978.

- 60 Sofue, Y.; Rubin, V. Rotation curves of spiral galaxies. *arXiv preprint astro-ph/0010594*, 2000.
- 61 Prada, F. et al. Observing the dark matter density profile of isolated galaxies. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 598, n. 1, p. 260, 2003.
- 62 Mathews, W. G.; Brighenti, F. Hot gas in and around elliptical galaxies. *arXiv preprint astro-ph/0309553*, 2003.
- 63 Romanowsky, A. J. et al. A dearth of dark matter in ordinary elliptical galaxies. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 301, n. 5640, p. 1696–1698, 2003.

APÊNDICE A – Código para calcular equações de campo

O código das próximas páginas foi feito no programa *Mathematica* para calcular as equações de campo $\mathbf{G}_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4) \mathbf{T}_{\mu\nu}$. Este código foi construído em colaboração com meu colega Luis Cesar Nunes dos Santos.

```

(*Limpar definições*)

$Assumptions = True;
Quiet[Remove ["Global`*"]];

(*Definindo as coordenadas.*)

x1 = t;
x2 = r;
x3 = z;
x4 = ϕ;

(*Tensor métrico covariante gμν na forma de matriz com assinatura (-+++).*)

gcv = 
$$\begin{pmatrix} -c^2 \gamma[x_2, x_3]^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha[x_2, x_3]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha[x_2, x_3]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta[x_2, x_3]^2 \end{pmatrix};$$


(*Tensor métrico contravariante gμν na forma de matriz.*)

gct = Inverse[gcv] // FullSimplify;

(*Símbolos de Christoffel  $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{aa} (\partial_c g_{ab} + \partial_b g_{ac} - \partial_a g_{bc})$ .*)

cnx = Table[ $\left( \sum_{m=1}^4 \left( (1/2) * (gct[[m, a]]) * (D[gcv[[m, b]], x_a]) \right) + \right.$ 
 $\sum_{m=1}^4 \left( (1/2) * (gct[[m, a]]) * (D[gcv[[m, d]], x_b]) \right) -$ 
 $\left. \sum_{m=1}^4 \left( (1/2) * (gct[[m, a]]) * (D[gcv[[b, d]], x_m]) \right) \right),$ 
{a, 4}, {b, 4}, {d, 4}] // FullSimplify;

(*Tensor de Riemann  $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}$ .*)

Rnnmx = Table[ $\partial_{x_a} (cnx[[m, n, b]]) - \partial_{x_b} (cnx[[m, n, a]]) +$ 
 $\sum_{s=1}^4 (cnx[[m, s, a]] * cnx[[s, n, b]]) - \sum_{s=1}^4 (cnx[[m, s, b]] * cnx[[s, n, a]]),$ 
{m, 4}, {n, 4}, {a, 4}, {b, 4}] // FullSimplify;

```

$$(*\text{Tensor de Ricci } R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} . *)$$

$$\begin{aligned} \text{Rcv} = & \text{Table} \left[\sum_{n=1}^4 (\partial_{x_n} \text{cnx}[[m, a, b]]) - \right. \\ & \partial_{x_n} \left(\sum_{m=1}^4 (\text{cnx}[[m, a, m]]) \right) + \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 (\text{cnx}[[m, n, m]] * \text{cnx}[[n, a, b]]) - \\ & \left. \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 (\text{cnx}[[m, n, b]] * \text{cnx}[[n, a, m]]) \right], \{a, 4\}, \{b, 4\} // \text{FullSimplify}; \end{aligned}$$

$$\text{Rmx} = \text{Table}[\text{Sum}[\text{gct}[[a, b]] \text{Rcv}[[a, d]], \{a, 4\}, \{b, 4\}, \{d, 4\}] // \text{FullSimplify};$$

$$(*\text{Escalar de curvatura } R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . *)$$

$$R = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 (\text{gct}[[m, n]] * \text{Rcv}[[m, n]]) // \text{FullSimplify};$$

$$(*\text{Tensor de Einstein } G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\lambda{}_\lambda . *)$$

$$\text{Gcv} = \text{Table}[\text{Rcv}[[a, b]] - \frac{1}{2} \text{gcv}[[a, b]] R, \{a, 4\}, \{b, 4\}] // \text{FullSimplify};$$

$$\text{Gmx} = \text{Table}[\text{Sum}[\text{gct}[[a, b]] \text{Gcv}[[a, d]], \{a, 4\}, \{b, 4\}, \{d, 4\}] // \text{FullSimplify};$$

$$\begin{aligned} (*\text{Quadri-velocidade } U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = & \left(\frac{c}{\sqrt{-g_{00} - g_{11}v_1^2 - g_{22}v_2^2 - g_{33}v_3^2}}, \frac{v^i}{\sqrt{-g_{00} - g_{11}v_1^2 - g_{22}v_2^2 - g_{33}v_3^2}} \right); \\ v^i = \frac{dx^i}{dt} = & (v^x, v^y, v^z); \quad d\tau = \sqrt{-ds^2} . *) \end{aligned}$$

$$v = \{0, 0, 0, 0\};$$

$$\begin{aligned} \text{Uct} = & \text{Table} \left[\text{If}[a = 1, 1 / \left(\sqrt{\left(\frac{1}{c^2} (-\text{gcv}[[1, 1]] - \text{Sum}[\text{gcv}[[i, i]] v[[i]] v[[i]], \{i, 4\}]) \right)} \right), \right. \\ & v[[a]] / \left(\sqrt{\left(\frac{1}{c^2} (-\text{gcv}[[1, 1]] - \text{Sum}[\text{gcv}[[i, i]] v[[i]] v[[i]], \{i, 4\}]) \right)} \right) \Big], \\ & \{a, 4\} // \text{FullSimplify}; \end{aligned}$$

$$\text{Ucv} = \text{Table}[\text{Sum}[\text{gcv}[[a, b]] \text{Uct}[[a]], \{a, 4\}, \{b, 4\}] // \text{FullSimplify};$$

(*Tensor de energia-momento $T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p+w)U_\mu U_\nu$ para fluido perfeito.*)

Tfpcv = Table[p[x₂, x₃] gcv[[a, b]] + $\left(\frac{p[x_2, x_3]}{c^2} + \rho[x_2, x_3]\right) \text{Ucv}[[a]] \text{Ucv}[[b]],$
{a, 4}, {b, 4}] // FullSimplify;

Tfpct = Table[p[x₂, x₃] gct[[a, b]] + $\left(\frac{p[x_2, x_3]}{c^2} + \rho[x_2, x_3]\right) \text{Uct}[[a]] \text{Uct}[[b]],$
{a, 4}, {b, 4}] // FullSimplify;

Tfpmx = Table[Sum[gct[[a, b]] Tfpcv[[a, d]], {a, 4}], {b, 4}, {d, 4}] // FullSimplify;

T = $\sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 (gct[[m, n]] * Tfpcv[[m, n]])$ // FullSimplify;

(*Derivada covariante de um tensor contravariante $A^{\mu\nu}$; ${}_{;\nu} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\nu} A^{\mu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} A^{\nu\alpha}$.*)

Dcvct[A_] := Table[Sum[D[A[[a, b]]], x_b] + Sum[cnx[[b, d, b]] A[[a, d]], {d, 4}] +
Sum[cnx[[a, d, b]] A[[b, d]], {d, 4}], {b, 4}], {a, 4}]